MÉMOIRE
SUR
L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. LE GENDRE.

(I.)

De l'Équation de la moindre Surface.

ON ſait, d'après M. de la Grange, que la ſurface la moindre entre des limites données, a pour équation différentielle Lû le 1.er Septembre 1787.

$$(1 + q^2) \frac{ddz}{dx^2} - 2pq \frac{ddz}{dxdy} + (1 + p^2) \frac{ddz}{dy^2} = 0,$$

en faiſant, pour abréger, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$. M. Monge a tenté d'intégrer cette équation dans les Mémoires de l'Académie de 1784 ; mais l'intégrale qu'il a donnée *(page 149)* n'étant pas à l'abri de toute objection, attendu que les ſignes d'intégration qui s'y trouvent, s'étendent ſur des différentielles à pluſieurs variables non aſſujetties à la condition d'intégrabilité, les difficultés qu'on a faites à ce géomètre, l'ont engagé à traiter de nouveau la même équation. Ses nouvelles recherches l'ont conduit à la vraie intégrale, qu'il a bien voulu me communiquer avec le procédé qu'il avoit ſuivi; mais ce procédé tenant à quelques principes métaphyſiques dont les géomètres ne conviennent pas encore, j'ai été curieux de chercher la même intégrale par les voies ordinaires, & j'y ai été engagé par M. Monge lui-même. On verra que j'y ſuis parvenu fort ſimplement par un changement de variables qui peut être utile dans d'autres occaſions, & que j'appliquerai enſuite à des équations plus générales.

Le problème dont il s'agit maintenant, ſe réduit à déterminer p & q en fonctions de x & y, de manière que $pdx + qdy$, & $\frac{pdy - qdx}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ soient toutes deux des différentielles exactes. Soit, pour abréger, $1 + p^2 + q^2 = u^2$, & il est clair que les quantités $xdp + ydq$ & $yd\left(\frac{p}{u}\right) - xd\left(\frac{q}{u}\right)$ seront aussi des différentielles complettes. Considérons x & y comme des fonctions de p & q, & faisons

$$xdp + ydq = d\omega,$$

ce qui donnera $x = \frac{d\omega}{dp}$, $y = \frac{d\omega}{dq}$; en développant $yd\left(\frac{p}{u}\right) - xd\left(\frac{q}{u}\right)$, on a

$$[(1+q^2)y + pqx]\frac{dp}{u^3} - [(1+p^2)x + pqy]\frac{dq}{u^3};$$

laquelle doit être une différentielle exacte, & donne par conséquent cette équation, en substituant les valeurs de x & y,

$$(1+q^2)\frac{dd\omega}{dq^2} + 2pq\frac{dd\omega}{dpdq} + (1+p^2)\frac{dd\omega}{dp^2} = 0 \ldots (A'),$$

équation qui a beaucoup d'analogie avec la proposée, mais dont la forme est plus simple, en ce qu'elle contient les variables p & q, au lieu de leurs différences partielles du premier ordre.

Lorsque la valeur de ω sera connue, il est clair qu'on aura celles de x, y, z, exprimées en p & q; savoir,

$$x = \frac{d\omega}{dp},\ y = \frac{d\omega}{dq};$$

$$z = px + qy - \omega.$$

On peut aussi trouver directement les équations en x, y, z; à l'aide de ces valeurs & de l'équation (A'). On aura de cette manière

$$(1+q^2)\frac{ddx}{dq^2} + 2pq\frac{ddx}{dpdq} + (1+p^2)\frac{ddx}{dp^2} + 2q\frac{dx}{dq} + 2p\frac{dx}{dp} = 0 \ldots (B').$$

& on trouve une équation entièrement ſemblable pour y & pour z, ce qui eſt aſſez remarquable.

Procédons maintenant à la réſolution des équations (A') & (B'), ou ſeulement de l'une des deux. Il faut d'abord déterminer les quantités compriſes ſous les fonctions arbitraires; ces quantités que je nomme a & b, ſont, comme l'on ſait, les deux conſtantes que fournira l'intégrale de la double équation

$$(1 + q^2)\, dp^2 - 2pqdpdq + (1 + p^2)\, dp^2 = 0\ .\ .(C').$$

Entr'autres manières d'intégrer cette équation, je choiſis celle-ci. Soit $p = aq + A$, a & A étant des conſtantes, l'équation ſe réduit à

$$1 + a^2 + A^2 = 0;$$

d'où il ſuit que a reſtera arbitraire, & qu'on aura

$$A = \pm \sqrt{(-1 - a^2)};$$

donc les deux intégrales de l'équation (C') ſeront

$$p = aq + \sqrt{(-1 - a^2)},$$
$$p = bq - \sqrt{(-1 - b^2)}:$$

les deux conſtantes arbitraires a & b ſont les deux racines de l'équation

$$(1 + q^2)\, a^2 - 2pqa + 1 + p^2 = 0,$$

de ſorte qu'on aura

$$a + b = \frac{2pq}{1 + q^2},\ ab = \frac{1 + p^2}{1 + q^2}.$$

On peut ſimplifier maintenant les équations (A') & (B') en regardant ω & x comme fonctions de a & b. Pour la facilité des ſubſtitutions, on pourra laiſſer A à la place de $\sqrt{(-1 - a^2)}$, & B à la place de $\sqrt{(-1 - b^2)}$, l'équation (A') deviendra *

(*) Lorſqu'on conſidère une quantité ω comme fonction de p & q, enſuite cette même quantité comme fonction de a & b, ou réciproquement, il ne faut pas confondre $\frac{dd\omega}{dpda}$ avec $\frac{dd\omega}{dadp}$; c'eſt une erreur qu'il ſeroit facile de commettre dans les ſubſtitutions indiquées.

$$(a - b)\,\frac{ddω}{dadb} - \frac{A}{B} \cdot \frac{dω}{da} + \frac{B}{A} \cdot \frac{dω}{db} = 0,$$

& l'équation (B')

$$\frac{ddx}{dadb} = 0.$$

Celle-ci a pour intégrale

$$x = \varphi : a + \psi : b,$$

φ & ψ étant deux fonctions arbitraires. Et puisque les équations en y & z sont absolument semblables à l'équation en x, on auroit aussi

$$y = \varphi 1 : a + \psi 1 : b,$$

$$z = \varphi 2 : a + \psi 2 : b,$$

$\varphi 1$, $\varphi 2$, $\psi 1$, $\psi 2$, étant de nouvelles fonctions arbitraires. Mais il n'est pas nécessaire d'introduire un si grand nombre de fonctions, & les deux qui entrent dans la valeur de x suffisent pour déterminer les autres.

En effet, on a d'abord x ou $\frac{dω}{dp} = \varphi : a + \psi : b$; donc $dω = dp\,.\,\varphi : a + dp\,\psi : b$. Cette valeur suppose q constant; & à cause de $p - qa = A$, $p - qb = - B$, on a dans cette hypothèse

$$dp = (q + A')\,da,$$

$$dp = (q - B')\,db,$$

où l'on voit que A' & B' sont mis pour $\frac{dA}{da}$ & $\frac{dB}{db}$. J'aurai donc

$$dω = (q + A')\,da\varphi : a + (q - B')\,db\psi : b.$$

À la place de φ & ψ, je prends φ' & ψ' qui seroient à l'ordinaire $\frac{d\varphi}{da}$ & $\frac{d\psi}{db}$, ce qui donnera

$$x = \varphi' : a + \psi' : b;$$

& en intégrant la valeur de $dω$,

$ω =$

$$\omega = q\,(\varphi + \psi) - A\varphi' + B\psi'$$
$$+ \int A\varphi''\,da - \int B\psi''\,db + \pi : q,$$

j'ajoute une fonction arbitraire de q, puisque q a été supposé constant dans la valeur de $d\omega$.

Maintenant $y = \frac{d\omega}{dq}$, & en supposant p constant, on a $\frac{da}{dq} = \frac{-a}{q + A'}$, $\frac{db}{dq} = \frac{-b}{q - B'}$; donc

$$y = \varphi + \psi - a\,\varphi' - b\,\psi' + \pi' :$$

mais nous savons que y doit être de la forme

$$\varphi\ 1 : a + \psi\ 1 : b\,;$$

donc π' ne contient point q. On peut supposer $\pi = 0$, & l'on aura

$$y = \varphi - a\,\varphi' + \psi - b\,\psi'$$
$$\omega = q\,(\varphi + \psi) - A\,\varphi' + B\psi' + \int A\,\varphi''\,da - \int B\,\psi''\,db;$$

de-là résulte $px + qy - \omega$, ou

$$z = -\int A\,\varphi''\,da + \int B\,\psi''\,db:$$

ainsi en partant des deux fonctions arbitraires φ & ψ, les trois coordonnées x, y, z de la surface cherchée, ont pour valeurs

$$x = \varphi' + \psi'$$
$$y = \varphi - a\,\varphi' + \psi - b\,\psi'$$
$$z = -\int A\,\varphi''\,da + \int B\,\psi''\,db.$$

Telle est l'intégrale de l'équation de la moindre surface que M. Monge avoit trouvée par sa méthode, & dont la découverte lui appartient. Il est aisé de faire disparoître entièrement les signes $\int$ dans ces expressions; car en intégrant par parties, on a

$$\int A\,\varphi''\,da = A\,\varphi' - A'\,\varphi + \int A''\,\varphi\,da;$$

faisant donc $\int A''\,\varphi\,da = \Phi$, & de même $\int B''\,\psi\,db = \Psi$, les valeurs de x, y, z, s'exprimeront ainsi par les nouvelles fonctions arbitraires Φa, Ψb:

$$x = A^3 \Phi'' - 3 A a \Phi' + B^3 \Psi'' - 3 B b \Psi'$$

$$y = - A^3 a \Phi'' + (2a - 1) A \Phi' - B^3 b \Psi'' + (2b - 1) B \Psi'$$

$$z = - A^4 \Phi'' + 2A^2 a \Phi' - \Phi + B^4 \Psi'' - 2B^2 b \Psi' + \Psi,$$

valeurs où on a laissé A & B à la place de $\sqrt{(-1 - a^2)}$ & $\sqrt{(-1 - b^2)}$. Mais on voit que les premières formules seront souvent plus simples, malgré les signes d'intégration qui y restent.

Voici deux applications de ces formules.

1.° Soit $\varphi' = \frac{A}{a}$ & $\psi' = \frac{B}{b}$; soit aussi $y^2 + z^2 = r^2$ & c une constante arbitraire, on aura l'équation de la surface

$$e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2r}{c};$$

c'est celle du solide produit par la révolution de la chaînette, surface qui, comme on sait déjà, est la moindre parmi celles des solides de révolution entre deux limites données.

2.° Si on cherche la surface la moindre entre deux lignes droites données, non situées dans le même plan, soit m la plus courte distance de ces lignes, λ l'angle qu'elles font entr'elles; on pourra déterminer *à priori* la forme des fonctions φ & ψ, & il en résultera pour l'équation de la surface cherchée, réduite à la forme la plus simple,

$$z = x \text{ tang. } \frac{\lambda y}{m}$$

(I I).

D'une Équation plus générale dont les coéfficiens sont fonctions de p *&* q.

Je me propose maintenant l'équation

$$A \frac{ddz}{dx^2} + B \frac{ddz}{dx\,dy} + C \frac{ddz}{dy^2} = 0 .. (D')$$

dont les coéfficiens sont fonctions de $\frac{dz}{dx}$ & $\frac{dz}{dy}$, que j'appelle toujours p & q. Au lieu de considérer z, p, q; comme des fonctions de x & y, rien n'empêche de regarder x, y, z, comme des fonctions de p & q; alors $x\,dp + y\,dq$, étant une différentielle exacte que j'appelle $d\omega$, il est clair qu'on aura

$$x = \frac{d\omega}{dp},\ y = \frac{d\omega}{dq},\ z = px + qy - \omega.$$

Tout se réduit donc à déterminer la fonction ω: or on a $\frac{ddz}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, valeur qui suppose y constant, & par conséquent

$$\frac{dd\omega}{dq\,dp} . dp + \frac{dd\omega}{dq^2} dq = 0;$$

on a en même temps

$dx = \frac{dd\omega}{dp^2} . dp + \frac{dd\omega}{dp\,dq} . dq$; substituant la valeur de dq, tirée de la supposition de y constant, on aura

$$dx = \left(\frac{dd\omega}{dp^2} - \frac{\left(\frac{dd\omega}{dq\,dp}\right)^2}{\frac{dd\omega}{dq^2}}\right) dp;$$

donc $\frac{dp}{dx}$ ou

$$\frac{ddz}{dx^2} = \frac{\frac{dd\omega}{dq^2}}{\frac{dd\omega}{dp^2} . \frac{dd\omega}{dq^2} - \left(\frac{dd\omega}{dp\,dq}\right)^2}.$$

On trouvera de même

$$\frac{ddz}{dx\,dy} = \frac{-\frac{dd\omega}{dp\,dq}}{\frac{dd\omega}{dp^2} . \frac{dd\omega}{dq^2} - \left(\frac{dd\omega}{dp\,dq}\right)^2}$$

$$\frac{ddz}{dy^2} = \frac{\frac{dd\omega}{dp^2}}{\frac{dd\omega}{dp^2} . \frac{dd\omega}{dq^2} - \left(\frac{dd\omega}{dp\,dq}\right)^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation à résoudre, on aura cette transformée

$$A\frac{dd\omega}{dq^2} - B\frac{dd\omega}{dp\,dq} + C\frac{dd\omega}{dp^2} = 0 \ldots (E')$$

qui est analogue à la proposée, mais qui est plus simple en ce qu'elle ne contient point de différences partielles du premier ordre.

L'équation de la moindre surface n'est, comme on voit, qu'un cas particulier de celle-ci. Voici encore un problème qui se rapporte à la même formule.

L'équation de la surface qui éprouve le moins de résistance dans le sens de l'ordonnée z, est

$$\frac{d\left(\frac{p}{u^4}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{q}{u^4}\right)}{dy} = 0,$$

en faisant

$$dz = p\,dx + q\,dy, \;\&\; u^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Cette équation étant développée devient

$$(1 + q^2 - 3p^2)\frac{ddz}{dx^2} - 8pq\frac{ddz}{dx\,dy} + (1 + p^2 - 3q^2)\frac{ddz}{dy^2} = 0;$$

elle se réduit donc à la résolution de celle-ci

$$(1 + q^2 - 3p^2)\frac{dd\omega}{dq^2} + 8pq\frac{dd\omega}{dp\,dq} + (1 + p^2 - 3q^2)\frac{dd\omega}{dp^2} = 0.$$

Pour avoir les quantités enveloppées sous les fonctions arbitraires, il faut intégrer l'équation

$$(1 + q^2 - 3p^2)\,dp^2 - 8pq\,dp\,dq + (1 + p^2 - 3q^2)\,dq^2 = 0;$$

je la mets sous la forme

$$(1 + q^2 + p^2)(dp^2 + dq^2) = 4(p\,dp + q\,dq)^2,$$

& faisant $p = r\,\text{sin.}\,\theta$, $q = r\,\text{cos.}\,\theta$, elle deviendra

$$(1 + r^2)(dr^2 + r^2 d\theta^2) = 4r^2 dr^2;$$

d'où l'on tire

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\left(\frac{3r^2 - 1}{1 + r^2} \right)}.$$

Il eſt facile d'intégrer le ſecond membre, en faiſant

$$\frac{1 + r^2}{3r^2 - 1} = s^2,$$

ce qui donne

$$\pm d\theta = \frac{ds}{1 + s^2} - \frac{3ds}{3s^2 - 1},$$

& en intégrant,

$$a \pm \theta = A \text{ tang. } s + \frac{\sqrt{(3)}}{2} \log. \left(\frac{s\sqrt{3} + 1}{s\sqrt{3} - 1} \right);$$

ainſi les deux quantités a, b, enveloppées ſous les fonctions, ſeront

$$A \text{ tang. } s + \tfrac{1}{2} \sqrt{3} \log. \frac{s\sqrt{3} + 1}{s\sqrt{3} - 1} + \theta$$

$$\& \; A \text{ tang. } s + \tfrac{1}{2} \sqrt{3} \log. \frac{s\sqrt{3} + 1}{s\sqrt{3} - 1} - \theta;$$

mais la complication de ces quantités laiſſe peu d'eſpoir de trouver la valeur de ω en un nombre fini de termes.

(III).

De l'Équation qui ne contient que les termes du ſecond ordre.

Soit

$$\frac{ddz}{dx^2} = r, \quad \frac{ddz}{dx\,dy} = s, \quad \frac{ddz}{dy^2} = t,$$

& ſuppoſons qu'on ait une équation quelconque entre $r, s, t,$ ſans aucune autre variable, ſavoir

$$r = F(s, t);$$

voici comment je ramène cette équation à une équation linéaire de même ordre, qui ne renfermera point de différences partielles du premier.

Puiſqu'on a $dp = rdx + sdy$, & $dq = sdx + tdy$, il eſt clair que $xdr + yds$ & $xds + ydt$ ſont des différentielles exactes. Conſidérons x & y comme des fonctions de s & t, & faiſons $x\,ds + y\,dt = d\omega$, on aura

$$x = \frac{d\omega}{ds},\ y = \frac{d\omega}{dt}:$$

mais l'équation entre r, s & t donnera

$$dr = A\,ds + B\,dt,$$

A & B étant des fonctions connues de s & t; ainſi la quantité $x\,dr + y\,ds$ deviendra

$$(Ax + y)\,ds + Bx\,dt;$$

& puiſqu'elle eſt une différentielle complette, on aura

$$\frac{d(Ax + y)}{dt} = \frac{d(Bx)}{ds};$$

d'où l'on tire $A\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = B\frac{dx}{ds}$, à cauſe de $\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{ds}$. Subſtituant les valeurs de x & y, on aura

$$\frac{dd\omega}{dt^2} + A\frac{dd\omega}{dt\,ds} - B\frac{dd\omega}{ds^2} = 0,$$

équation linéaire dont les coéfficiens A & B ſont ſimplement fonctions de t & s, ſans différences partielles. On ſait intégrer cette équation lorſqu'elle ſatisfait à la condition requiſe pour que ſon intégrale ſoit exprimable en un nombre fini de termes.

Il eſt clair que ω étant trouvé, on aura x & y par les équations $x = \frac{d\omega}{ds}$, $y = \frac{d\omega}{dt}$; on aura enſuite $q = sx + ty - \omega$, & $p = rx + sy - \int(x\,dr + y\,ds)$, quantité qui ſera intégrable; enfin on aura $z = px + qy - \int(rx\,dx + sx\,dy + sy\,dx + ty\,dy) = px + qy - \frac{rx^2}{2} - sxy - \frac{ty^2}{2} + \int(\frac{x^2}{2}dr + xy\,ds + \frac{y^2}{2}dt)$, quantité qui ſera pareillement intégrable.

La théorie des équations linéaires étant la plus importante dans le calcul intégral aux différences partielles, je ſaiſirai cette occaſion de préſenter ici quelques réſultats généraux ſur ce genre d'équations. Ils ſont le fruit d'un calcul aſſez pénible, mais dont je crois devoir ſupprimer les détails à cauſe de leur longueur.

(IV).

De l'Équation linéaire du ſecond ordre à trois variables.

v étant la variable principale, fonction inconnue des deux autres x & y, je me propoſe l'équation

$$\frac{ddv}{dx^2} + a\frac{ddv}{dxdy} + b\frac{ddv}{dy^2} + c\frac{dv}{dx} + f\frac{dv}{dy} + gv = 0,$$

dont les coéfficiens ne contiennent que x & y, & qui n'a point de dernier terme ſans v. Ce dernier terme ne compliqueroit pas beaucoup le calcul; mais il eſt ſi aiſé de le faire diſparoître par la valeur la plus particulière de v, que j'ai cru pouvoir le ſupprimer.

M. de la Place a déjà conſidéré cette équation dans les Mémoires de l'Académie *(année 1773)*, & il a donné une méthode fort ſimple pour parvenir à l'intégrale par différentes transformations, ſi toutefois cette intégrale eſt poſſible en un nombre fini de termes, ce qui exige une équation de condition.

Mais la méthode de M. de la Place ſuppoſe qu'on faſſe diſparoître deux des trois premiers termes de l'équation, ce qui peut être embarraſſant dans pluſieurs cas: voici un procédé qui n'eſt point ſujet à cet inconvénient, & qui mène au même but.

Soient p & P les deux racines de l'équation

$$p^2 - ap + b = 0,$$

ces quantités ſont très-remarquables, en ce qu'elles font connoître la nature des fonctions arbitraires. En effet, ſi on intègre les équations $dy - pdx = 0$, $dy - Pdx = 0$, & que les intégrales ſoient $\theta =$ conſt. $\Theta =$ conſt. les fonctions arbitraires ſeront $\varphi : \theta$ & $\psi : \Theta$.

Les valeurs de p & P feront connoître celles de q, Q & μ, par les équations

$$(2p - a)q = \frac{dp}{dx} + (a - p)\frac{dp}{dy} + (cp - f),$$

$$Q = c - q,$$

$$\mu = \frac{dq}{dx} + P\frac{dq}{dy} + Qq - g;$$

alors v' étant une nouvelle variable, l'équation proposée équivaudra à ces deux-ci,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dy} + qv = v' \\ \frac{dv'}{dx} + P\frac{dv'}{dy} + Qv' = \mu v \end{array}\right\}:$$

il eſt facile de s'en aſſurer en éliminant v'.

Si $\mu = 0$, il eſt clair que l'équation eſt intégrée, puiſqu'elle eſt ramenée au premier ordre; mais ſi μ n'eſt pas zéro, on procédera à une nouvelle transformée. On prendra M & ν par les valeurs

$$(P - p)M = \frac{dP}{dx} + p\frac{dP}{dy} - \frac{dp}{dx} - P\frac{dp}{dy},$$

$$\nu = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} + \frac{p}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dy},$$

& on fera

$$q' = q - \nu - M,$$

$$Q' = Q + M,$$

$$\mu' = \mu + \frac{dq'}{dx} + P\frac{dq'}{dy} + Mq' - \frac{dQ}{dx} - p\frac{dQ}{dy} - MQ;$$

on aura les deux nouvelles équations

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dv'}{dx} + p\frac{dv'}{dy} + q'v'' = v'' \\ \frac{dv''}{dx} + P\frac{dv''}{dy} + Q'v'' = \mu'v' \end{array}\right\}$$

qui tiendront lieu de la transformée en v', laquelle ſeroit du même degré que la propoſée. Si μ' eſt zéro, la queſtion eſt ramenée au premier ordre, ſinon on continuera les transformations

transformations; & en conservant toujours p, P, M qui sont invariables dans les différentes transformées, on fera

$$\nu' = \frac{1}{\mu'} \cdot \frac{d\mu'}{dx} + \frac{p}{\mu'} \cdot \frac{d\mu'}{dy}$$

$$q'' = q' - \nu' - M$$

$$Q'' = Q' + M$$

$$\mu'' = \mu' + \frac{dq''}{dx} + P\frac{dq''}{dy} + Mq'' - \frac{dQ'}{dx} - p\frac{dQ'}{dy} - MQ'$$

& on aura les nouvelles transformées

$$\frac{dv''}{dx} + p\frac{dv''}{dy} + q''v'' = v'''$$

$$\frac{dv'''}{dx} + P\frac{dv'''}{dy} + Q''v''' = \mu''v''.$$

On procédera ainsi jusqu'à ce qu'on trouve un terme $\mu^{(i)}$ qui soit nul, dans la suite μ, μ', μ'', &c. l'équation $\mu^{(i)} = 0$, sera l'équation de condition, pour que l'intégrale de la proposée, considérée par rapport à la fonction arbitraire $\varphi:\theta$, soit composée d'un nombre fini de termes. Il sera facile de remonter ensuite à la valeur complette de v.

En effet, soit, par exemple, $\mu''' = 0$, à cause de $Q^{(i)} = Q + iM$, on aura l'équation du premier ordre

$$\frac{dv^{\text{IV}}}{dx} + P\frac{dv^{\text{IV}}}{dy} + (Q + 3M)v^{\text{IV}} = 0.$$

v^{IV} étant connu, pour intégrer l'équation

$$\frac{dv'''}{dx} + p\frac{dv'''}{dy} + q'''v''' = v^{\text{IV}},$$

on observera que $q''' = q + 3M - \nu - \nu' - \nu''$; & qu'en faisant $v''' = \mu\mu'\mu''V'''$, cette équation devient

$$\frac{dV'''}{dx} + p\frac{dV'''}{dy} + (q + 3M)V''' = \frac{v^{\text{IV}}}{\mu\mu'\mu''}.$$

La valeur complette de v^{IV} renferme la fonction arbitraire $\psi(\Theta)$; celle de v''' renferme en outre l'autre fonction $\varphi\,\theta$;

on remonte enſuite à la valeur de v par les équations

$$\mu'' v'' = \frac{d v'''}{d x} + P \frac{d v'''}{d y} + (Q - 2M) v'''$$

$$\mu' v' = \frac{d v''}{d x} + P \frac{d v''}{d y} + (Q - M) v''$$

$$\mu \, v = \frac{d v'}{d x} + P \frac{d v'}{d y} + Q \, v';$$

ce qui n'exige que des différenciations. Si on négligeoit tout-à-fait $\psi.\Theta$, on auroit $v''' = 0$, & la valeur de v feroit de cette forme,

$$v = A\varphi + B \frac{d\varphi}{d\theta} + C \frac{dd\varphi}{d\theta^2} + D \frac{d^3\varphi}{d\theta^3}.$$

EXEMPLE.

Il ne ſera pas inutile d'appliquer cette méthode à un exemple connu : ſoit donc l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{ddv}{dx^2} - h^2 y^{2m} \frac{ddv}{dy^2} = 0,$$

on aura d'abord dans toutes les transformées

$$p = h y^m, \; P = - h y^m, \; M = 0.$$

Soit

$$\frac{dp}{dy} = p^{\mathrm{I}}, \; \frac{dp^{\mathrm{I}}}{dy} = p^{\mathrm{II}} \; \& \; \frac{m-1}{m} = n;$$

les valeurs des coéfficiens dans les transformées ſucceſſives, ſuivront cette loi :

$$q = -\tfrac{1}{2} p^{\mathrm{I}}, \qquad \mu = \frac{2n-1}{4} p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{I}}$$

$$Q = \tfrac{1}{2} p^{\mathrm{I}}, \qquad \nu = 2\, n\, p^{\mathrm{I}}$$

$$q' = -(\tfrac{1}{2} + 2n) p^{\mathrm{I}}, \; \mu' = \frac{(2n+1)(4n-1)}{4} p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{I}}$$

$$Q' = \tfrac{1}{2} p^{\mathrm{I}}, \qquad \nu' = 2\, n\, p^{\mathrm{I}}$$

$$q'' = -(\tfrac{1}{2} + 4n) p^{\mathrm{I}}, \; \mu'' = \frac{(4n+1)(6n-1)}{4} p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{I}}$$

$$Q'' = \tfrac{1}{2} p^{\mathrm{I}}, \qquad \nu'' = 2\, n\, p^{\mathrm{I}}$$

&c. &c.

Les quantités Q, Q', Q'', &c. ne changent donc pas non plus que ν, ν', ν'', &c. mais il faut principalement faire attention aux quantités μ, μ', μ'', &c. Et on voit qu'une de ces quantités s'évanouira toujours, si on a $n = \pm \frac{1}{2K}$; ce qui donne $m = \frac{2K}{2K \pm 1}$, K étant un entier. En effet, on sait d'ailleurs que l'intégrale de l'équation proposée est possible en termes finis, dans les mêmes cas que l'équation de Riccati.

(V.)

De l'Équation linéaire du second ordre, à quatre variables.

SOIT l'équation

$$0 = \frac{ddv}{dx^2} + a\frac{ddv}{dxdy} + b\frac{ddv}{dxdz} + c\frac{ddv}{dy^2} + f\frac{ddv}{dydz} + g\frac{ddv}{dz^2} + h\frac{dv}{dx} + i\frac{dv}{dy} + k\frac{dv}{dz} + lv,$$

dont les coéfficiens sont fonctions de x, y, z seuls, & qui n'a point de dernier terme sans v.

Il y a d'abord une condition nécessaire pour que l'intégrale de cette équation soit composée d'un nombre fini de termes, par rapport à l'une des fonctions arbitraires; il faut qu'on ait

$$(ab - 2f)^2 = (a^2 - 4c)(b^2 - 4g) \ldots\ldots (A''),$$

ou, ce qui revient au même, il faut que le polynome

$$x^2 + axy + bxz + cy^2 + fyz + gz^2$$

formé avec les coéfficiens des termes du second ordre, soit décomposable en deux facteurs rationnels

$$x + py + qz$$
$$x + Py + Qz;$$

propriété très-remarquable, & qui a lieu d'une manière analogue dans les équations de tous les ordres, avec un nombre quelconque de variables.

Soit, pour abréger,

$$a = 2p + m,$$
$$b = 2q + n;$$

on aura

$$c = p^2 + pm,$$
$$f = 2pq + pn + qm,$$
$$g = q^2 + qn.$$

Ainsi les cinq coéfficiens $a, b, c, f, g,$ seront donnés par les quatre quantités $p, q, m, n,$ & l'équation de condition (A'') sera remplie d'elle-même. De plus, on aura

$$P = p + m,$$
$$Q = q + n.$$

Il importe d'abord d'examiner quelles quantités entrent sous les fonctions arbitraires. Or si l'on combine les deux équations

$$dy - pdx = 0,$$
$$dz - qdx = 0,$$

& qu'on en tire les deux intégrales $\theta =$ const. $\theta' =$ const. l'une des fonctions sera $\varphi(\theta, \theta')$. De même, si des deux équations

$$dy - Pdx = 0,$$
$$dz - Qdx = 0,$$

on tire les deux intégrales $\Theta =$ const. $\Theta' =$ const. l'autre fonction arbitraire sera $\psi(\Theta, \Theta')$.

La possibilité de représenter ainsi les fonctions arbitraires, tient à l'équation de condition (A''); en sorte que si cette équation n'a pas lieu, le calcul se refuse à représenter les fonctions arbitraires par des fonctions de deux variables.

Il s'agit de savoir maintenant quels sont les cas où la valeur de v considérée par rapport à l'une des fonctions arbitraires φ, contiendra un nombre fini de termes, & sera de la forme

$$A\varphi + B\frac{d\varphi}{d\theta} + D\frac{dd\varphi}{d\theta^2} + \&c.$$
$$+ C\frac{d\varphi}{d\theta'} + E\frac{dd\varphi}{d\theta d\theta'} + \&c.$$
$$+ F\frac{dd\varphi}{d\theta'^2} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

Or le genre d'équations dont il s'agit présente un cas très-étendu, où quatre équations de condition suffisent pour que l'intégrale soit composée d'un nombre indéfini de termes; en voici les symptômes.

Si on conserve les dénominations précédentes, & qu'on détermine de nouveau r, R, μ, par les quatre équations

$$mr = -\frac{dp}{dx} - P\frac{dp}{dy} - Q\frac{dp}{dz} - hp + i,$$
$$nr = -\frac{dq}{dx} - P\frac{dq}{dy} - Q\frac{dq}{dz} - hq + k,$$
$$R = h - r$$
$$\mu = \frac{dr}{dx} + P\frac{dr}{dy} + Q\frac{dr}{dz} + Rr - l,$$

ce qui donne cette seconde équation de condition,

$$\frac{dp}{mdx} + P\frac{dp}{mdy} + Q\frac{dp}{mdz} + \frac{hp - i}{m}$$
$$= \frac{dq}{ndx} + P\frac{dq}{ndy} + Q\frac{dq}{ndz} + \frac{hq - k}{n} \ldots (B'');$$

l'équation proposée sera équivalente à ces deux-ci,

$$\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dy} + q\frac{dv}{dz} + rv = v',$$
$$\frac{dv'}{dx} + P\frac{dv'}{dy} + Q\frac{dv'}{dz} + Rv' = \mu v.$$

Si donc μ étoit zéro, ce qui feroit une troisième équation de condition, l'équation seroit ramenée au premier ordre, & par conséquent intégrée; alors v' ne contiendroit point la fonction φ, & v la contiendroit dans un seul terme.

Si μ n'est pas zéro, il est aisé de voir que l'équation en v' ſera du même degré que la propoſée, & qu'elle pourra être traitée de la même manière, d'autant plus que les termes affectés des différences du ſecond ordre auront les mêmes coéfficiens. Mais ſans développer cette équation en v', on peut continuer ainſi les transformations. Soit, pour abréger,

$$\nu = \frac{d\mu}{\mu dx} + p\frac{d\mu}{\mu dy} + q\frac{d\mu}{\mu dz},$$

$$Mm = \frac{dm}{dx} + p\frac{dm}{dy} + q\frac{dm}{dz} - m\frac{dp}{dy} - n\frac{dp}{dz},$$

$$Nn = \frac{dn}{dx} + p\frac{dn}{dy} + q\frac{dn}{dz} - m\frac{dq}{dy} - n\frac{dq}{dz};$$

on trouvera que l'équation de condition (B'') appliquée à la transformée en v', donne $M = N$, ou

$$\frac{dm}{mdx} + p\frac{dm}{mdy} + q\frac{dm}{mdz} - \frac{dp}{dy} - \frac{n}{m}\cdot\frac{dp}{dz}$$
$$= \frac{dn}{ndx} + p\frac{dn}{ndy} + q\frac{dn}{ndz} - \frac{m}{n}\frac{dq}{dy} - \frac{dq}{dz}\ldots (C'');$$

nouvelle équation de condition qui heureuſement ne contient que des quantités invariables, & qui par conſéquent, une fois remplie, aura toujours lieu dans les transformées ſucceſſives.

Nous avons donc juſqu'à préſent trois équations de condition (A''), (B''), (C''), au moyen deſquelles, faiſant

$$r' = r + M - \nu,$$
$$R' = R - M,$$

$$\mu' = \left\{\begin{array}{l} \mu + \frac{dr'}{dx} + P\frac{dr'}{dy} + Q\frac{dr'}{dz} - Mr' \\ - \frac{dR}{dx} - p\frac{dR}{dy} - q\frac{dR}{dz} + MR \end{array}\right\},$$

l'équation en v' ſera équivalente à ces deux-ci,

$$\frac{dv'}{dx} + p\frac{dv'}{dy} + q\frac{dv'}{dz} + r'v' = v''$$
$$\frac{dv''}{dx} + P\frac{dv''}{dy} + Q\frac{dv''}{dz} + R'v'' = \mu'v'.$$

Il eſt clair maintenant que, ſans aucune condition nouvelle, on peut continuer les transformées aussi loin qu'on voudra: ainsi faisant

$$\nu' = \frac{d\mu'}{\mu' dx} + p\frac{d\mu'}{\mu' dy} + q\frac{d\mu'}{\mu' dz}$$

$$r'' = r' + M - \nu'$$

$$R'' = R' - M$$

$$\left.\begin{aligned}\mu'' = \mu' + \frac{dr''}{dx} + P\frac{dr''}{dy} + Q\frac{dr''}{dz} - M r'' \\ - \frac{dR'}{dx} - p\frac{dR'}{dy} - q\frac{dR'}{dz} + MR',\end{aligned}\right\}$$

l'équation en v'' sera équivalente à ces deux-ci

$$\frac{dv''}{dx} + p\frac{dv''}{dy} + q\frac{dv''}{dz} + r''v'' = v'''$$

$$\frac{dv'''}{dx} + P\frac{dv'''}{dy} + Q\frac{dv'''}{dz} + R''v''' = \mu''v''.$$

Supposons donc que dans la suite μ', μ'', μ''', &c. il y ait un terme $\mu^{(i)}$ qui s'évanouisse ; $\mu^{(i)} = 0$ sera la quatrième équation de condition nécessaire pour obtenir par cette méthode l'intégrale complette.

Soit, par exemple, $\mu''' = 0$; on commencera par intégrer l'équation

$$\frac{dv^{IV}}{dx} + P\frac{dv^{IV}}{dy} + Q\frac{dv^{IV}}{dz} + (R - 3M)v^{IV} = 0,$$

& la valeur de v^{IV} sera de la forme $A\psi(\Theta, \Theta')$. On intégrera ensuite l'équation

$$\frac{dv'''}{dx} + p\frac{dv'''}{dy} + q\frac{dv'''}{dz} + (r + 3M - \nu' - \nu'' - \nu''')v''' = v^{IV}$$

qui, en faisant

$$v''' = \mu\,\mu'\,\mu''\,V''',$$

se réduit à cette forme

$$\frac{dV'''}{dx} + p\frac{d.V'''}{dy} + q\frac{dV'''}{dz} + (r + 3M)V''' = \frac{v^{IV}}{\mu\mu'\mu''};$$

il en résultera dans la valeur de v''' une nouvelle fonction arbitraire $\varphi(\theta, \theta')$, & à l'aide des équations

$$\mu'' v'' = \frac{d\,v'''}{d\,x} + P\,\frac{d\,v'''}{d\,y} + Q\,\frac{d\,v'''}{d\,z} + (R - 2M)\,v''',$$

$$\mu' v' = \frac{d\,v''}{d\,x} + P\,\frac{d\,v''}{d\,y} + Q\,\frac{d\,v''}{d\,z} + (R - M)\,v'',$$

$$\mu v = \frac{d\,v'}{d\,x} + P\,\frac{d\,v'}{d\,y} + Q\,\frac{d\,v'}{d\,z} + R v';$$

il ne faudra plus que des différenciations pour parvenir à la valeur complette de v.

Je remarquerai en général que si on a $\mu^{(i)} = 0$, & qu'on détermine T par l'équation

$$\frac{d\,T}{d\,x} + p\,\frac{d\,T}{d\,y} + q\,\frac{d\,T}{d\,z} + (r + i\,M)T = 0;$$

qu'ensuite on fasse

$$m\,\frac{d\,T}{d\,y} + n\,\frac{d\,T}{d\,z} = T^{(1)}$$

$$m\,\frac{d\,T^{(1)}}{d\,y} + n\,\frac{d\,T^{(1)}}{d\,z} = T^{(2)}$$

&c.

la valeur de v, considérée seulement par rapport à la fonction φ, qui entre dans T, sera de cette forme,

$$v = T^{(i)} + \alpha\,T^{(i-1)} + \beta\,T^{(i-2)} \ldots + \omega T.$$

On pourroit donc se servir directement de cette forme, & il n'y auroit plus à déterminer, dans les différens cas, que les coéfficiens α, β, &c. ce qui pourroit se faire de bien des manières.

Tel est le développement d'un cas très-étendu, où l'on peut assigner l'intégrale complette de l'équation proposée, si elle satisfait seulement à quatre conditions, ou même à trois, au cas que l'intégrale ne doive contenir qu'un terme. Mais on se tromperoit beaucoup, si l'on croyoit la théorie de ces équations épuisée par la considération seule du cas précédent. Le succès de la méthode exposée dans l'*article IV*, est fondé sur deux choses; 1.° si la valeur de v contient un nombre un nombre fini de termes affectés de la fonction & de ses différences, celle de v' ou de

$$\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dy} + qv,$$

contiendra un terme de moins; 2.° & ce qui est bien essentiel, l'équation en v' sera du même ordre que la proposée.

Nous avons suivi la même marche dans les équations à quatre variables de l'article présent. Il a été facile d'obtenir le premier point, & de faire en sorte que la valeur de v' ou de

$$\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dy} + q\frac{dv}{dz} + rv,$$

contînt toujours un terme de moins que la proposée. Pour obtenir le second point, c'est-à-dire, pour que l'équation en v' fût du même ordre que la proposée, il a fallu de plus satisfaire à l'équation de condition *(B'')*, équation qui paroissoit devoir se renouveler à chaque transformation, & multiplier ainsi les conditions, à mesure que le nombre des termes augmenteroit dans la valeur de v. Mais il s'est trouvé heureusement qu'en satisfaisant deux fois à cette condition, par les équations *(B'')* & *(C'')*, on y satisfaisoit toujours, & qu'il n'y avoit par conséquent que quatre conditions à remplir pour que l'intégrale eût un nombre indéfini de termes.

Les autres cas qui restent à considérer sont bien plus compliqués, en ce que les transformées successives ne sont plus du même ordre que la proposée. Alors on n'a guère d'autre méthode pour parvenir aux intégrales, que celle des coéfficiens indéterminés; méthode très-laborieuse, malgré les artifices de calcul par lesquels on peut la simplifier. Voici les résultats qu'elle m'a fournis.

Les quantités sous les fonctions se déterminent d'abord comme dans le cas précédent, & on tombe de même sur l'équation de condition *(A'')* qui paroît essentiellement nécessaire dans tous les cas. On suivra donc les mêmes dénominations que dans le commencement de cet article; faiſant enſuite

$$\frac{dp}{dx} + P\frac{dp}{dy} + Q\frac{dp}{dz} + hp - i = -mr,$$

$$\frac{dq}{dx} + P\frac{dq}{dy} + Q\frac{dq}{dz} + hq - k = -ns,$$

$$R = h - r,$$

$$\mu = \frac{dr}{dx} + P\frac{dr}{dy} + Q\frac{dr}{dz} + Rr - l,$$

l'équation propoſée ſera équivalente à ces deux-ci,

$$\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dy} + q\frac{dv}{dz} + rv = v',$$

$$\frac{dv'}{dx} + P\frac{dv'}{dy} + Q\frac{dv'}{dz} + Rv' = \mu v + n(r-s)\frac{dv}{dz}:$$

mais le terme $n(r - s)\frac{dv}{dz}$ qui ne s'évanouit pas maintenant, empêche que l'équation en v' ne ſoit du même ordre que la propoſée, quoique v' contienne un terme de moins que v.

Maintenant les valeurs de M & N étant priſes comme ci-deſſus, ſi la valeur de v conſidérée par rapport à la fonction arbitraire φ, contient néceſſairement cette fonction & les coéfficiens de ſes différences ſucceſſives juſqu'à l'ordre e incluſivement, elle ſatisfera à l'équation de condition

$$r - s = e(N - M) \ldots\ldots (D''),$$

& le nombre total des conditions, y compris les équations (A'') & (D''), ſera $e + 3$. Quant à la forme la plus ſimple ſous laquelle on peut mettre la valeur de v, ſuppoſons qu'on a déterminé T par l'équation

$$\frac{dT}{dx} + p\frac{dT}{dy} + q\frac{dT}{dz} + (r + eM)T = 0,$$

& la valeur de v ſera,

ſi $e = 1$, $v = m\frac{dT}{dy} + n\frac{dT}{dz} + \alpha T$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } e = 2,\ v = m^2 \frac{ddT}{dy^2} + 2mn \frac{ddT}{dydz} + n^2 \frac{ddT}{dz^2} \\ \qquad + \alpha \frac{dT}{dy} + \beta \frac{dT}{dz} + \gamma T\end{array}\right\};$$

$$\text{si } e = 3,\ v = m^3 \frac{d^3T}{dy^3} + 3m^2n \frac{d^3T}{dy^2dz} + 3mn^2 \frac{d^3T}{dydz^2} + n^3 \frac{d^3T}{dz^3}$$
$$+ \alpha \frac{ddT}{dy^2} + \beta \frac{ddT}{dydz} + \gamma \frac{ddT}{dz^2}$$
$$+ \delta \frac{dT}{dy} + \varepsilon \frac{dT}{dz} + \zeta T,$$

&c.

de ſorte qu'on pourra achever le calcul dans tous les cas, par un moindre nombre de coéfficiens indéterminés.

Le cas général que nous avons examiné, ne ſe rapporte à aucun de ceux-ci, puiſque $r - s$ & $N - M$ étant nuls l'un & l'autre, la quantité $\frac{r-s}{N-M}$ reſte indéterminée.

V I.

Des Équations du ſecond ordre à cinq variables.

Nous ne dirons qu'un mot des équations du ſecond ordre à cinq variables. D'abord les coéfficiens des différentielles du ſecond ordre donnent un polynome de dix termes, lequel doit ſe décompoſer en deux facteurs rationnels

$$x + py + qz + rt,$$
$$x + Py + Qz + Rt,$$

d'où réſultent trois équations de condition néceſſaires dans tous les cas. Si on combine les trois équations

$$dy - pdx = 0,$$
$$dz - qdx = 0,$$
$$dt - rdx = 0,$$

& qu'on en tire trois intégrales, $\theta =$ conſt. $\theta' =$ conſt. $\theta'' =$ conſt. l'une des fonctions arbitraires ſera fonction de θ, θ', θ''; l'autre ſe trouvera pareillement par l'intégration des trois équations

$$dy - Pdx = 0,$$
$$dz - Qdx = 0,$$
$$dt - Rdx = 0.$$

La théorie de ces équations préſente un cas très-étendu, où, moyennant huit équations de condition, on peut trouver l'intégrale complette avec un nombre indéfini de termes. Ce cas eſt analogue à celui qui ſuppoſe quatre conditions dans les équations à quatre variables, c'eſt pourquoi nous nous contentons de l'indiquer; les autres équations qui pourroient être intégrables dans le même ordre, ſuppoſent un ſi grand nombre de conditions, qu'il paroît inutile de s'en occuper.

VII.

D'une Équation particulière du troiſième ordre à trois variables.

ON ne peut traiter en général les équations du troiſième ordre, malgré la reſtriction que nous mettons dans leurs coéfficiens, de même que nous avons traité celles du ſecond; la raiſon en eſt que ſi la valeur de v contient un nombre fini de termes par rapport à l'une des fonctions, on peut bien déterminer p & q, de manière que $\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dy} + qv$ ou v' contienne un terme de moins que v; mais l'équation en v' n'eſt plus en général du même degré que la propoſée, difficulté qui nous a déjà arrêtés dans les équations du ſecond ordre à plus de trois variables. L'équation en v' ſe trouveroit du troiſième, & même on auroit deux équations de cet ordre, entre leſquelles on pourroit choiſir ſeulement, car il ne faudroit pas chercher à les combiner entr'elles pour abaiſſer leur degré, cette combinaiſon mèneroit à une équation identique. Il ne reſte donc guère dans les équations au-dessus du second ordre, que la méthode vague des coéfficiens indéterminés; cependant voici un cas assez étendu, qui se laisse résoudre avec une seule équation de condition.

Supposons que les différences, par rapport à l'une des variables, ne passent pas le premier ordre & qu'on ait

$$\frac{d^3 v}{dx^3} + a\frac{ddv}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv$$
$$+ f\frac{d^3 v}{dx^2\,dy} + g\frac{ddv}{dx\,dy} + h\frac{dv}{dy} = 0;$$

alors, des trois fonctions arbitraires qui doivent entrer dans la valeur de v, deux seront fonctions de y seule, & si la valeur de v considérée par rapport à l'une de ces fonctions est terminée, voici comment on y parviendra.

Soit

$$\frac{dv}{dx} + pv = v';$$

on aura

$$\frac{ddv'}{dx^2} + A\frac{ddv'}{dx\,dy} + B\frac{dv'}{dx} + C\frac{dv'}{dy} + Dv' = \mu v,$$

en prenant les coéfficiens de la manière suivante :

$$A = f$$
$$B = a - p$$
$$C = g - fp$$
$$D = b - ap + pp - f\frac{dp}{dy} - 2\frac{dp}{dx}$$
$$\mu = \frac{ddp}{dx^2} + A\frac{ddp}{dx\,dy} + B\frac{dp}{dx} + C\frac{dp}{dy} + Dp - c$$
$$\frac{dp}{dx} = pp + \frac{h - gp}{f}.$$

Il n'y a donc aucune équation de condition; au contraire, la quantité p qui sert à déterminer les autres coéfficiens, dépend d'une équation différentielle dont la constante arbitraire est une fonction quelconque de y. Mais il est inutile d'intégrer complètement cette équation, & une ſeule valeur particulière de p ſuffit.

Des deux équations

$$\frac{dv}{dx} + pv = v'$$

$$\frac{ddv'}{dx^2} + f\frac{ddv'}{dxdy} + B\frac{dv'}{dx} + C\frac{dv'}{dy} + Dv' = \mu v,$$

on déduira cette transformée en v'

$$\frac{d^3v'}{dx^3} + a'\frac{ddv'}{dx^2} + b'\frac{dv'}{dx} + c'v'$$

$$+ f\frac{d^3v'}{dx^2dy} + g'\frac{ddv'}{dxdy} + h'\frac{dv'}{dy} = 0;$$

où l'on voit que le coéfficient f n'a pas changé, comme appartenant aux termes du troiſième ordre qui déterminent la nature des fonctions arbitraires. Les autres coéfficiens ſont,

$$a' = B + p - \frac{d\mu}{\mu dx}$$

$$g' = C + \frac{df}{dx} + f\left(p - \frac{d\mu}{\mu dx}\right)$$

$$b' = D + \frac{dB}{dx} + B\left(p - \frac{d\mu}{\mu dx}\right)$$

$$h' = \frac{dC}{dx} + C\left(p - \frac{d\mu}{\mu dx}\right)$$

$$c' = \frac{dD}{dx} + D\left(p - \frac{d\mu}{\mu dx}\right) - \mu.$$

Si dans la transformée en v' on fait de même,

$$\frac{dv'}{dx} + p'v' = v'',$$

on aura d'abord une équation de la forme

$$\frac{ddv''}{dx^2} + f\frac{ddv''}{dxdy} + B'\frac{dv''}{dx} + C'\frac{dv''}{dy} + D'v'' = \mu'v;$$

puis en éliminant v', on aura une ſeconde transformée en v'', de la même forme que la propoſée, & ainſi de ſuite, ſans que le calcul offre aucune condition à remplir.

Suppoſons maintenant que dans la ſuite μ, μ', μ'', &c. il y ait un terme $\mu^{(i)}$ qui s'évanouiſſe, l'équation $\mu^{(i)} = 0$, ſera la condition requiſe pour que l'intégrale de la propoſée ait un nombre fini de termes par rapport à l'une des fonctions de y qu'elle doit contenir. Il ſera facile enſuite de trouver la valeur de v développée ſuivant cette fonction & ſes différences.

Par exemple, ſi on a $\mu'' = 0$, l'équation qui détermine v''' ne ſera que du ſecond ordre, ſavoir,

$$\frac{ddv'''}{dx^2} + f\frac{ddv'''}{dxdy} + B''\frac{dv'''}{dx} + C''\frac{dv'''}{dy} + D''v''' = 0;$$

c'eſt-à-dire que des trois fonctions arbitraires que doit contenir la valeur complette de v, l'une qui eſt fonction de y ſeule, ne ſe rencontre point dans v'''. Ainſi en ne conſidérant que cette fonction, on a $v''' = 0$; enſuite la valeur de v'' ſe trouvera par l'équation

$$\frac{dv''}{dx} + p''v'' = 0,$$

elle renfermera par conſéquent la fonction de y dont il s'agit.

On déterminera enſuite v' & v par la ſimple différentiation au moyen des équations

$$\mu'v' = \frac{ddv''}{dx^2} + f\frac{ddv''}{dxdy} + B'\frac{dv''}{dx} + C'\frac{dv''}{dy} + D'v''$$

$$\mu v = \frac{ddv'}{dx^2} + f\frac{ddv'}{dxdy} + B\frac{dv'}{dx} + C\frac{dv'}{dy} + Dv';$$

d'où il ſuit que la valeur de v co tiendra trois termes, & ſera de la forme

$$v = M\varphi + N\varphi' + P\varphi''.$$

Si on vouloit avoir la valeur complette de v, il faudroit intégrer complettement l'équation du ſecond ordre qui détermine v'''.

(VIII),

D'une Équation à trois variables d'un ordre indéfini.

On peut intégrer généralement toute équation de la forme

$$
\begin{aligned}
T = {} & a v \\
& + b\left(x \frac{dv}{dx} + y \frac{dv}{dy}\right) \\
& + c\left(x^2 \frac{ddv}{dx^2} + 2xy \frac{ddv}{dx\,dy} + y^2 \frac{ddv}{dy^2}\right) \\
& + f\left(x^3 \frac{d^3v}{dx^3} + 3x^2 y \frac{d^3v}{dx^2dy} + 3xy^2 \frac{d^3v}{dx\,dy^2} + \frac{d^3v}{dy^3}\right) \\
& + \&c.
\end{aligned}
$$

a, b, c, f, &c. étant des conſtantes, & T une fonction quelconque de x & y.

En effet, il ſeroit facile de l'abaiſſer généralement à un ordre inférieur, en lui conſervant la même forme; mais la méthode la plus ſimple, c'eſt de la ramener aux différences ordinaires. Soit $\frac{x}{y} = \theta$, $y = \pi$, & conſidérons maintenant v comme une fonction de θ & π; l'équation propoſée deviendra

$$T = av + b\pi \frac{dv}{d\pi} + c\pi^2 \frac{ddv}{d\pi^2} + f\pi^3 \frac{d^3v}{d\pi^3} + \&c. \quad (A'''),$$

où il eſt clair qu'on ne doit plus conſidérer que la variabilité de π, & que les conſtantes en nombre égal au degré de l'équation, feront autant de fonctions arbitraires de θ ou de $\frac{x}{y}$.

L'équation (A''') eſt connue des géomètres, & on ſait l'intégrer en général; mais il ſemble qu'on n'a pas penſé à lui donner une forme encore plus ſimple en faiſant $\frac{d\pi}{\pi} = d\omega$; alors on a

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{d\pi} &= \frac{1}{\pi} \frac{dv}{d\omega} \\
\frac{ddv}{d\pi^2} &= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{ddv}{d\omega^2} - \frac{dv}{d\omega}\right) \\
\frac{d^3v}{d\pi^3} &= \frac{1}{\pi^3}\left(\frac{d^3v}{d\omega^3} - \frac{3\,ddv}{d\omega^2} + \frac{2dv}{d\omega}\right) \\
\frac{d^4v}{d\pi^4} &= \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{d^4v}{d\omega^4} - \frac{6\,d^3v}{d\omega^3} + \frac{11\,d^2v}{d\omega^2} - \frac{6\,dv}{d\omega}\right),
\end{aligned}
$$

&c.

la loi

la loi des coéfficiens étant la même que dans les produits, $x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)$, &c. ainsi la transformée sera

$$T = av + b' \frac{dv}{d\omega} + c' \frac{ddv}{d\omega^2} + f' \frac{d^3v}{d\omega^3} + \text{\&c.}$$

& aura ses coéfficiens constans, ce qui est le dernier degré de simplicité.

(I X.)

Des Équations non linéaires du premier ordre.

M. de la Grange a considéré ces équations sous un point de vue fort ingénieux dans les *Mémoires de Berlin, années 1772 & 1774*. Nous suivrons ici les traces de cet illustre géomètre, & nous tâcherons de généraliser quelques-uns de ses résultats.

Faisant à l'ordinaire

$$\frac{dz}{dx} = p, \text{ \& } \frac{dz}{dy} = q,$$

une équation quelconque du premier ordre est une relation entre les cinq variables p, q, x, y, z; d'où l'on peut déduire q, par exemple, en fonction des quatre autres, & poser

$$dq = A\,dp + B\,dx + C\,dy + D\,dz.$$

Considérons les trois variables x, y, z, comme indépendantes entr'elles, & p comme une fonction inconnue de ces trois variables; on aura

$$dq = \left(B + A\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(C + A\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(D + A\frac{dp}{dz}\right)dz;$$

alors l'équation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, n'est plus identique ; elle doit seulement être intégrable par le moyen d'un facteur, & satisfaire à l'équation de condition

$$\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} + p\frac{dq}{dz} - q\frac{dp}{dz} = 0$$

qui devient, en faiſant les ſubſtitutions,

$$A\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dy} + (pA - q)\frac{dp}{dz} + B + pD = 0 \,..\, (a').$$

L'équation non linéaire du premier ordre eſt ainſi ramenée à une équation linéaire du même ordre où il y a une variable de plus.

Il n'eſt pas néceſſaire de réſoudre complettement l'équation (a'), il ſuffit d'en tirer une valeur de p qui renferme une conſtante arbitraire a. En effet, cette valeur de p, ſubſtituée dans l'équation $dz - pdx - qdy = 0$, rendra cette équation intégrable. Je ſuppoſe que l'intégrale ſoit $V = b$, b étant la nouvelle conſtante arbitraire, cette intégrale ſeroit encore vraie, en ſuppoſant a variable, ſi on prenoit

$$b = \varphi(a), \;\&\; \frac{dV}{da} = \varphi'(a);$$

il n'y a donc qu'à chaſſer a, ou imaginer qu'il ſoit chaſſé des deux équations

$$V = \varphi(a), \; \frac{dV}{da} = \varphi'(a),$$

& on aura l'intégrale de l'équation propoſée, intégrale complette, puiſqu'elle renferme la fonction arbitraire φ.

Sans recourir à l'équation (a'), on auroit pareillement l'intégrale complette de l'équation propoſée, ſi on avoit une valeur de z qui renfermât deux conſtantes arbitraires a & b; car il en ſeroit de cette valeur comme de l'équation $V = b$ dont nous venons de parler; on la différentieroit en faiſant tout varier, & on auroit

$$dz = pdx + qdy + Mda + Ndb;$$

donc, pour que la ſuppoſition de a & b variables ſatisfaſſe à l'équation, comme celle de a & b conſtans, il faut ſuppoſer

$$b = \varphi(a),$$
$$M + N\varphi'(a) = 0,$$

& combiner ces équations avec la relation donnée entre x, y, z, a, b : on peut concevoir que a & b en ſoient éliminés, & qu'on ait ainſi l'intégrale complette avec la fonction arbitraire φ.

En général, ſoit une équation aux différences partielles du premier ordre, entre une fonction inconnue Z, & tant de variables qu'on voudra, $x, y, z, u,$ &c. ſi on connoît une valeur particulière de Z qui renferme autant de conſtantes arbitraires $a, b, c, e,$ &c. qu'il y a de variables $x, y, z, u,$ &c. il ſera facile d'en déduire l'intégrale complette; car en faiſant tout varier, on aura

$$dZ = p\,dx + q\,dy + r\,dz + s\,du + \&c.$$
$$+ M\,da + N\,db + P\,dc + Q\,de + \&c.$$

Suppoſons que a ſoit une fonction quelconque des autres conſtantes arbitraires $b, c, e,$ &c. en ſorte qu'on ait

$$a = \varphi\,(b, c, e, \&c.);$$

pour faire diſparoître la partie $M\,da + N\,db +$ &c. il faudra ſuppoſer

$$0 = N + M\frac{d\varphi}{db},$$
$$0 = P + M\frac{d\varphi}{dc},$$
$$0 = Q + M\frac{d\varphi}{de},$$
$$\&c.$$

Ces équations ſont en même nombre que les conſtantes $b, c, e,$ &c. ſi nous y joignons la valeur de Z dans laquelle on mettra φ à la place de a, nous pourrons concevoir que $b, c, e,$ &c. ſoient éliminées, & qu'il reſte ainſi l'intégrale complette avec la fonction arbitraire φ dans toute ſa généralité.

Il pourra arriver dans des cas particuliers, que la valeur de Z, quoique renfermant le nombre de conſtantes exigé, ne ſoit cependant pas aſſez générale pour faire parvenir à l'intégrale complette; alors on trouveroit quelques relations entre les coéfficiens $\frac{d\varphi}{db}$, $\frac{d\varphi}{dc}$, &c. qui diminueroient le nombre des quantités b, c, e, &c. ſur leſquelles s'étend la fonction φ. Mais ce ne feroit point un défaut de la méthode que nous venons de développer, elle feroit toujours parvenir à l'intégrale la plus générale qu'il eſt poſſible de déduire de l'intégrale particulière ſuppoſée. Un exemple éclaircira cette idée: ſuppoſons que l'intégrale complette ſoit

$$Z = \varphi\left(xy, \frac{z}{x}, x + uy\right),$$

ſi on partoit de cette valeur particulière

$Z = axy + bx^2y^2 + \frac{c}{xy} + e$, quoiqu'il y eût quatre conſtantes, on n'en pourroit tirer que cette valeur plus générale,

$$Z = \varphi(xy).$$

Si on prenoit $Z = axy + \frac{bz}{x} + cyz + e$, on n'en pourroit déduire que cette intégrale

$$Z = \varphi\left(xy, \frac{z}{x}\right),$$

plus générale que la précédente, mais encore incomplette.

Revenons à la réſolution de l'équation (a'). D'après la théorie de M. de la Grange ſur les équations linéaires, on ſait que l'équation (a') ſera réſolue complettement ſi on intègre les équations aux différences ordinaires,

$$\left.\begin{aligned} dx + A\,dy &= 0 \\ dz + (pA - q)\,dy &= 0 \\ dp - (B + pD)\,dy &= 0 \end{aligned}\right\} (b').$$

En effet, ſi les intégrales déduites de la combinaiſon de ces trois équations, ſont

$$\alpha = \text{conſt.}$$
$$\beta = \text{conſt.}$$
$$\gamma = \text{conſt.}$$

l'intégrale de l'équation (a') ſera généralement

$$\alpha = \varphi(\zeta, \gamma),$$

φ étant une fonction quelconque de ζ & de γ.

On voit donc que la réſolution des équations aux différences partielles non linéaires du premier ordre, eſt ramenée à celle de trois équations aux différences ordinaires entre quatre variables p, x, y, z; d'ailleurs il n'eſt pas néceſſaire d'avoir les trois intégrales complettes auxquelles ces équations doivent conduire; il ſuffit d'en avoir une ſeule, ſuivant ce que nous avons démontré.

Donc dans tous les cas où la combinaiſon des équations (b') mènera à une équation intégrable, on aura la ſolution complette de l'équation aux différences partielles propoſée. Nous connoîtrons donc les cas d'intégrabilité les plus ſimples des équations dont il s'agit, ſi nous cherchons en général quelles ſont les valeurs de q, pour que les équations (b') donnent ou une équation entre deux variables, ou deux équations entre trois. Il y auroit naturellement ſix cas de la première eſpèce & quatre de la ſeconde; mais en omettant ceux qui rentreroient dans les équations linéaires, il reſtera trois cas de la première eſpèce & trois de la ſeconde, que nous allons conſidérer ſucceſſivement.

Premier cas d'intégrabilité.

Suppoſons que l'équation

$$dp - (B + pD)\,dy = 0$$

eſt intégrable d'elle-même, il faudra que $B + pD$ ſoit une fonction de p & y ſeuls; nommant φ cette fonction, on aura

$$\frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz} = \varphi(p, y),$$

équation linéaire d'où l'on tire

$$q = x\varphi(p, y) + \psi(z - px, p, y),$$

ψ déſignant une fonction quelconque des trois quantités

$z - px, p, y$. Si donc la valeur de q eſt compriſe dans cette forme générale, on intégrera l'équation aux différences ordinaires,

$$dp - \varphi dy = 0;$$

d'où l'on tirera une valeur de p avec une conſtante arbitraire, & de-là l'intégrale complette de l'équation aux différences partielles propoſée.

Deuxième Cas.

Suppoſons qu'en éliminant dy de la première & de la troiſième des équations (b'), on ait cette équation intégrable

$$A dp + (B + pD)\, dx = 0,$$

il faudra que $\frac{B + pD}{A}$ ſoit une fonction de p & x ſeuls, ce qui donnera

$$\frac{dq}{dx} + p\,\frac{dq}{dz} = \frac{dq}{dp}\,\varphi(p, x);$$

d'où l'on tire

$$q = \psi(z - \int p\,dx, \theta, y),$$

θ étant une nouvelle fonction de p & x priſe arbitrairement, $\int p\,dx$ eſt priſe en ſuppoſant θ conſtante; & ψ ou q déſigne une fonction quelconque des trois quantités $z - \int p\,dx, \theta, y$.

Lorſque la quantité q aura cette forme, on fera $\theta = a$, ce qui donnera la valeur de p avec une conſtante arbitraire.

On peut particulariſer cette formule & en déduire une infinité d'autres en donnant des valeurs à θ. Soit, par exemple, $\theta = px^2$ on aura $\int p\,dx = \int \frac{\theta\, dx}{xx} = -\frac{\theta}{x}$ $= -px$; donc

$$q = \psi(z + px, px^2, y);$$

dans ce cas on feroit $p = \frac{a}{x^2}$, a étant la conſtante arbitraire, d'où réſulteroit l'intégrale complette.

Pour vérifier la valeur générale de q, il eſt néceſſaire de connoître les différences partielles de la formule intégrale

$\int p\,dx$, prise en supposant constante une fonction θ des deux variables p & x. Considérons en général la formule $\Delta = \int T dx$, dans laquelle T est une fonction de p & x, & qu'on a intégrée en supposant constante la quantité θ qui est pareillement fonction de p & x. Nous pourrons supposer $\Delta = \int (T dx + \mu d\theta)$, puis faisant $d\theta = \alpha dx + \beta dp$, nous aurons

$$\Delta = \int [(T + \mu\alpha)\,dx + \mu\beta dp].$$

On peut concevoir que μ est déterminé de manière que la quantité sous le signe est une différentielle complette, ce qui donnera

$$\frac{d\,(T + \mu\alpha)}{dp} = \frac{d\,(\mu\beta)}{dx},$$

ou simplement

$$\frac{dT}{dp} + \alpha\,\frac{d\mu}{dp} = \beta\,\frac{d\mu}{dx};$$

alors la valeur de Δ, telle que nous la venons d'écrire, ne suppose plus θ constant, & on a par conséquent

$$\frac{d\Delta}{dx} = T + \mu\alpha, \quad \frac{d\Delta}{dp} = \mu\beta.$$

On trouvera que ces valeurs suffisent, sans chercher à déterminer μ.

Troisième Cas.

La seconde & la troisième des équations (b') donnent

$$(B + pD)\,dz + (pA - q)\,dp = 0.$$

Supposons donc que cette équation est intégrable, & que son intégrale est $\theta =$ const. Soit

$$d\theta = \alpha dz + \beta dp,$$

ce qui donnera

$$\frac{dq}{dx} + p\,\frac{dq}{dz} = \frac{\alpha}{\beta}\left(p\,\frac{dq}{dp} - q\right),$$

on tirera de cette équation la formule

$$q = p\,\psi\left(x - \int \frac{dz}{p}, \theta, y\right),$$

l'intégrale $\int \frac{dz}{p}$ étant prise en supposant θ constant. Prenant donc pour θ une fonction quelconque de p & z, on aura des formules particulières qui présenteront une infinité de cas d'intégrabilité. Dans les cas particuliers on fera $\theta = a$, ce qui donnera une valeur de p renfermant une constante arbitraire.

Au reste, avec un peu d'attention on voit que ce cas a une grande analogie avec le précédent, & pourroit même en être déduit par une simple permutation. En effet, l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, donne $dx = \frac{dz}{p} - \frac{q}{p}\,dy$; comparant terme à terme ces deux équations, on trouve que les deux cas rentrent l'un dans l'autre.

Quatrième cas.

Considérons les deux équations

$$dx + A\,dy = 0$$

$$dp - (B + pD)\,dy = 0;$$

elles seront intégrables, si les coéfficiens A & $B + pD$ sont fonctions de p, x & y sans z. Ainsi F & f désignant des fonctions quelconques de p, x & y, on aura

$$\frac{dq}{dp} = F(p, x, y),$$

$$\frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz} = f(p, x, y).$$

La première équation donne

$$q = \varphi\,(p, x, y) + \psi\,(x, y, z);$$

cette valeur étant substituée dans la seconde, on trouve que $\frac{d\psi}{dx} + p\,\frac{d\psi}{dz}$ doit se réduire à une fonction de p, x, y seuls, & qu'on a par conséquent

$$\frac{dd\psi}{dx\,dz} + p\,\frac{dd\psi}{dz^2} = 0;$$

de-là résulte

$$\frac{d\psi}{dz} = \Gamma\,(z - px, y, p):$$

mais ψ par sa première valeur ne doit pas contenir p; donc on a simplement

$$\frac{d\psi}{dz} = \Gamma\,(y),$$

ou

$$\psi = z\,\Gamma\,(y),$$

& par conséquent

$$q = \varphi\,(p, x, y) + z\,\Gamma\,(y).$$

Telle est la valeur que doit avoir q, pour que la solution de l'équation proposée ne dépende que de deux équations entre trois variables

$$dx + A\,dy = 0,$$
$$dp - (B + pD)\,dy = 0,$$

il n'y aura pas plus de difficulté dans ce cas que dans celui des équations linéaires.

Cinquième cas.

Supposons que des trois équations (b'), les deux suivantes,

$$dz + (pA - q)\,dy = 0,$$
$$dp - (B + pD)\,dy = 0,$$

ne renferment que trois variables p, y, z, & soient par conséquent intégrables, sans le concours de la troisième équation; il faudra qu'on ait

$$p\,\frac{dq}{dp} - q = F\,(p, y, z)$$

$$\frac{dq}{dx} + p\,\frac{dq}{dz} = f\,(p, y, z);$$

de-là on tire, par un calcul ſemblable à celui du cas précédent,

$$q_{,} = \varphi\,(p, y, z) + p\,x\,\Gamma\,(y).$$

Cette formule ſe déduiroit de celle du cas précédent, en faiſant les permutations qu'exige le changement terme à terme de l'équation

$$d\,z = p\,d\,x + q\,d\,y,$$

en celle-ci

$$d\,x = \frac{1}{p}\,d\,z - \frac{q}{p}\,d\,y.$$

Sixième cas.

La dernière combinaiſon qui nous reſte à examiner, eſt celle de deux équations entre x, p, z; ſavoir:

$$(p\,A - q)\,d\,x - A\,d\,z = 0,$$
$$(B + p\,D)\,d\,x + A\,d\,p = 0.$$

Pour qu'elles ſoient intégrables ſans le ſecours d'une troiſième équation, il faut qu'on ait

$$p\,\frac{d\,q}{d\,p} - q = \frac{d\,q}{d\,p}\,F\,(p, x, z)$$

$$\frac{d\,q}{d\,x} + p\,\frac{d\,q}{d\,z} = \frac{d\,q}{d\,p}\,f\,(p, x, z);$$

de-là on tire

$$q = \Gamma\,(y)\,.\,\varphi\,(p, x, z),$$

formule où l'on pourroit ſuppoſer $\Gamma\,y = 1$; car dans l'équation $d\,z = p\,d\,x + \Gamma\,.\,\varphi\,d\,y$, à la place de $d\,y\,.\,\Gamma\,(y)$ ou ſimplement $\Gamma\,.\,d\,y$, on peut mettre $d\,y$, ſans rien perdre du côté de la généralité.

Tels ſont les cas généraux où les équations aux différences partielles ſeront intégrables, ſoit par le moyen d'une équation aux différences ordinaires du premier ordre entre deux variables, ſoit par le moyen de deux équations entre trois variables. On peut regarder tous ces cas comme auſſi ſimples que l'équation linéaire priſe en général.

Si une équation proposée ne se rapporte à aucune des formes précédentes, on pourra tenter de l'y ramener par différentes permutations ou transformations de l'espèce de celles que nous avons déjà eu occasion d'indiquer.

Une des plus remarquables consiste à faire

$$p x + q y - z = r;$$

alors on a

$$d r = x d p + y d q,$$

équation d'où l'on peut tirer de nouvelles formules.

Par exemple, on voit que cette dernière équation seroit linéaire, si on avoit

$$y = x \varphi (p, q, r) + \psi (p, q, r);$$

donc une équation proposée seroit immédiatement réduite à une équation linéaire, si on avoit

$$y = x \varphi [p, q, p x + q y - z] + \psi [p, q, p x + q y - z].$$

Enfin, si on veut avoir une formule générale qui renferme tous les cas, & de laquelle au moins on puisse tirer des formules particulières assez simples, non comprises dans les précédentes, il faudra combiner à la fois les trois équations (b'), ce qui donnera

$$dp + \mu d z + \nu d x + [(\mu p + \nu) A - B - p D - \mu q]\, dy = 0,$$

équation toujours intégrable, en donnant aux quantités arbitraires μ & ν les valeurs convenables. Supposons que l'intégrale soit $\theta =$ const. θ étant une fonction quelconque de p, z, x, y, & soit

$$d\theta = \alpha dp + \beta dz + \gamma dx + \varepsilon dy;$$

on aura

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}, \nu = \frac{\gamma}{\alpha}, (\mu p + \nu) A - B - p D - \mu q = \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Cette dernière devient

$$(\mu p + \nu) \frac{dq}{dp} - \frac{dq}{dx} - p \frac{dq}{dz} - \mu q = \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Pour en tirer une valeur générale de q, soit intégrée l'équation

$$dz - p\,dx = 0,$$

en ſuppoſant θ & y conſtans, & ſoit l'intégrale $\lambda = a$. Soit pareillement intégrée l'équation

$$dq + \mu q\,dx + \frac{t}{\alpha}\,dx = 0;$$

en ſuppoſant θ, λ, y conſtans, & ſoit l'intégrale

$$q\,e^{M} - N = b;$$

on aura généralement

$$q = e^{-M} N + e^{-M} \psi(\theta, \lambda, y).$$

Cette formule ayant lieu dans un cas particulier, on fera $\theta =$ conſt. ce qui donnera la valeur de p avec une conſtante arbitraire, & de-là l'intégrale complette.

Pour faire voir, par un exemple, qu'on peut déduire une infinité de cas d'intégrabilité de la formule précédente, ſoit $\theta = \frac{pyz}{x}$, & on trouvera, en exécutant les opérations indiquées

$$q = -\frac{z}{2y} + \frac{1}{z}\,\psi\left[z^2 - pxz, \frac{pyz}{x}, y\right].$$

Si cette forme a lieu, on fera $\frac{pyz}{x} = a$, & on en déduira aiſément l'intégrale complette.

Addition au Mémoire imprimé dans le volume précédent, ſur la manière de diſtinguer les Maxima *des* Minima, *dans le calcul des variations.*

Il y a deux points ſur leſquels j'ai peu inſiſté dans ce Mémoire, & qui méritent quelques éclairciſſemens pour la ſolidité des démonſtrations. Il s'agit de faire voir 1.° que les quantités auxiliaires nommées α, β, γ, &c. dans les différens cas qu'on a conſidérés, peuvent toujours être ſuppoſées réelles, ſans quoi la quantité ſous le ſigne, quoique réduite à la forme d'un carré, pourroit n'être pas du même ſigne que ſon coéfficient. 2.° Que les conſtantes arbitraires qu'on imagine entrer dans les valeurs de α, β, γ, &c. peuvent être prises de manière que la partie hors du signe s'évanouisse, sans que cette condition les rende imaginaires.

J'appliquerai mon raisonnement au cas de l'*art. II, pages 11 & 12*; on verra aisément qu'il s'étend à tous les autres.

Première partie. Les équations qui déterminent α, β, γ, sont de la forme

$$d\alpha = \varphi\, dx,\ d\beta = \psi\, dx,\ d\gamma = \omega\, dx;$$

φ, ψ, ω étant des fonctions rationnelles & entières de α, β, γ; cette circonstance des fonctions entières aide à démontrer que les quantités α, β, γ seront toujours réelles, quelles que soient leurs valeurs pour une abscisse donnée, c'est-à-dire, quelles que soient les constantes arbitraires, pourvu qu'on les suppose réelles.

En effet, différentiant ces équations, en supposant dx constante, & faisant les substitutions nécessaires, on aura

$$dd\alpha = \varphi\,1\, dx^2,\ dd\beta = \psi\,1\, dx^2,\ dd\gamma = \omega\,1\, dx^2,$$
$$d^3\alpha = \varphi\,2\, dx^3,\ d^3\beta = \psi\,2\, dx^3,\ d^3\gamma = \omega\,2\, dx^3,$$
$$\&c. \qquad\qquad \&c. \qquad\qquad \&c.$$

$\varphi\,1$, $\psi\,1$, $\varphi\,2$, &c. étant pareillement des fonctions entières de α, β, γ.

Soient α', β', γ' les valeurs de α, β, γ qui répondent à l'abscisse donnée $x = a$, ces quantités α', β', γ' seront les trois constantes qu'on suppose réelles, mais arbitraires. Si on substitue ces constantes à la place de α, β, γ, dans les quantités φ, ψ, ω, $\varphi\,1$, $\psi\,1$, $\omega\,1$, &c. supposons que ces quantités deviennent φ', ψ', &c. il suit du théorème de Taylor, que les valeurs de α, β, γ, correspondantes à l'abscisse $a + i$ peu différente de a, seront

$$\alpha' + i\varphi' + \frac{i^2}{2}\varphi'\,1 + \frac{i^3}{2.3}\varphi'\,2 + \&c.$$

$$\beta' + i\psi' + \frac{i^2}{2}\psi'\,1 + \frac{i^3}{2.3}\psi'\,2 + \&c.$$

$$\gamma' + i\omega' + \frac{i^2}{2}\omega'\,1 + \frac{i^3}{2.3}\omega'\,2 + \&c.$$

ſuites convergentes, & par conſéquent exactes, ſi aucune des quantités φ', φ' ī, ψ', &c. n'eſt infinie. Or ces quantités ſont des fonctions entières des conſtantes α', β', γ'; elles ne peuvent donc devenir infinies par des valeurs particulières & finies de ces conſtantes; elles ne pourroient devenir infinies que par l'influence des quantités P, Q, R, S, &c. fonctions de x ſeule, qui indiqueroient alors quelque limite dans la courbe ou quelque irrégularité de courbure, dont nous devons faire abſtraction en conſidérant les choſes en général.

Connoiſſant les valeurs de α, β, γ, pour l'abſciſſe $a + i$, on peut s'en ſervir comme de nouvelles arbitraires pour déterminer les valeurs de α, β, γ, juſqu'à l'abſciſſe $a + 2i$, ou pour concevoir au moins qu'elles ſoient déterminées; car ſi on faiſoit réellement les ſubſtitutions dans la formule de Taylor, il y auroit des cas où elle ceſſeroit d'être convergente. Donc les auxiliaires α, β, γ, peuvent être cenſées réelles pour une abſciſſe quelconque (où l'ordonnée v de l'aire $\int v dx$ ſera réelle), & renfermer dans leur expreſſion générale, quelle qu'elle ſoit, trois conſtantes arbitraires réelles.

Seconde partie. Il faut prouver que la quantité hors du ſigne

$$(\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)^0$$
$$-(\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)^1$$

peut être ſuppoſée zéro, ſans qu'il ſoit à craindre que cette ſuppoſition rende imaginaires les conſtantes.

Pour faciliter cette démonſtration, j'obſerve que l'intégrale $\int S dx(\delta q + \mu\delta p + \lambda\delta y)^2$ devant être priſe entre les mêmes limites que l'intégrale $\int v dx$, par exemple, depuis $x = 0$ juſqu'à $x = b$, on peut diviſer cet intervalle en un certain nombre de parties égales très-petites, dont chacune ſoit déſignée par i, & conſidérer l'intégrale entière comme compoſée de différentes parties

$$(\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)^0$$
$$-(\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)^1$$
$$+\int S dx(\delta q + \mu\delta p + \lambda\delta y)^2.$$

priſes depuis le commencement juſqu'à la fin d'une des diviſions de l'abſciſſe, par exemple, depuis $x = a$ juſqu'à $x = a + i$.

Or la forme que nous avons donnée ci-deſſus aux valeurs de α, β, γ, depuis $x = a$ juſqu'à $x = a + i$, nous fait voir qu'en étendant auſſi peu notre intégrale, il ſera toujours aiſé de prendre les conſtantes réelles α', β', γ', de manière que la partie hors du ſigne ſoit zéro.

Appliquant le même raiſonnement à chacune des diviſions de l'abſciſſe, les conſtantes pourront changer de l'une à l'autre; mais elles ſeront toujours réelles, les parties hors du ſigne auront diſparu, & l'intégrale totale qui repréſente la variation du ſecond ordre, aura le même ſigne que S.

Cette diviſion de l'intégrale en petites portions indépendantes les unes des autres, peut être appliquée à la démonſtration de la première partie, & alors les difficultés qu'on pourroit encore élever ſur la non-convergence des ſuites dont on a fait uſage, ſeroient entièrement réſolues; car on voit facilement que ces ſuites ſeront toujours convergentes en prenant α', β', γ', très-petits. A la vérité les conſtantes α', β', γ' ne ſeroient plus les mêmes pour les différentes diviſions de l'abſciſſe, mais la propoſition n'en ſeroit pas moins établie que $\int S\,dx\,(\delta q + \mu\,\delta p + \lambda\,\delta y)^2$ eſt du même ſigne que S, & que les quantités hors du ſigne intégral ſont nulles.