MM. **Fernand Baldet**, **Félicien Bœuf**, **Hans Halban**, **Lew Kowarski**, **Pierre Laurent**, **François Maignon**, **Jules Rouch**, **Marcel Véron**, le Président de l'**Association française pour l'avancement des sciences**, le Directeur du **Bureau d'études géologiques et minières coloniales**, le Colonel Commandant l'**École polytechnique** adressent des remercîments pour les subventions qui leur ont été attribuées pour leurs recherches, leurs publications ou leurs bibliothèques.

M^me^ Veuve **Xavier Léon** adresse également des remercîments.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions convexes.* Note de M. **Szolem Mandelbrojt**, transmise par M. Jacques Hadamard.

J'indique dans cette Note une formule générale qui caractérise les fonctions convexes. Une fonction, définie dans un intervalle I, est dite convexe si, pour trois valeurs x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ de cet intervalle, on a

$$f(x_2) \leqq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Nous supposons, pour simplifier, que l'intervalle I est la droite entière, et nous démontrons le théorème suivant :

Théorème. — *Toute fonction $f(x)$ de la forme*

$$f(x) = \overline{\mathrm{borne}}_{-\infty < t < \infty} [xt - \varphi(t)], \tag{1}$$

où $\varphi(t)$ est une fonction quelconque, définie sur la droite entière $(-\infty < t < \infty)$, est une fonction convexe. Réciproquement : quelle que soit la fonction convexe $f(x)$, il existe une fonction $\varphi(t)$ telle que la relation (1) ait lieu ; on peut, en particulier, poser

$$\varphi(t) = \overline{\mathrm{borne}}_{-\infty < x < \infty} [xt - f(x)]. \tag{2}$$

A chaque fonction convexe $f(x)$ correspond donc une autre fonction convexe, $\varphi(t)$ qu'on peut appeler la fonction convexe *associée* à $f(x)$, et qui est liée à celle-ci par la double relation (1) et (2).

Démonstration. — La première partie du théorème est presque évidente. En effet, soit $\varphi(t)$ une fonction quelconque. On a, pour les valeurs x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ et pour une valeur t fixe quelconque, en posant

$F_t(x) = xt - \varphi(t)$,

$$F_t(x_2) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} F_t(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} F_t(x_3);$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x_2) = \underset{-\infty<t<\infty}{\overline{\text{borne}}} F_t(x_2) &\leqq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \underset{-\infty<t<\infty}{\overline{\text{borne}}} F_t(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \underset{-\infty<t<\infty}{\overline{\text{borne}}} F_t(x_3) \\ &= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3). \end{aligned}$$

Pour démontrer la suite il faut prouver que, quelle que soit la fonction convexe $f(x)$, on a

$$f(x) = \underset{-\infty<t<\infty}{\overline{\text{borne}}} \left\{ xt - \underset{-\infty<\tau<\infty}{\overline{\text{borne}}} [t\tau - f(\tau)] \right\}. \tag{3}$$

Or on a d'une part, quelle que soit la valeur de t,

$$xt - \underset{-\infty<\tau<\infty}{\overline{\text{borne}}} [t\tau - f(\tau)] \leqq xt - xt + f(x) = f(x);$$

le premier membre de (3) n'est donc pas inférieur au second membre.

On sait d'autre part qu'en chaque point x, la dérivée à droite $f'_+(x)$ existe, et l'on peut, évidemment, écrire

$$\underset{-\infty<t<\infty}{\overline{\text{borne}}} \left\{ xt - \underset{-\infty<\tau<\infty}{\overline{\text{borne}}} [t\tau - f(\tau)] \right\} \geqq x f'_+(x) - \underset{-\infty<\tau<\infty}{\overline{\text{borne}}} [\tau f'_+(x) - f(\tau)]. \tag{4}$$

Or on a

$$\underset{-\infty<\tau<\infty}{\overline{\text{borne}}} [\tau f'_+(x) - f(\tau)] = x f'_+(x) - f(x),$$

car d'une part, le premier membre de cette égalité à démontrer n'est pas inférieur au second, et d'autre part, on a

$$\tau f'_+(x) - f(\tau) \leqq x f'_+(x) - f(x),$$

quel que soit τ, du fait que

$$f'_+(x) \leqq \frac{f(\tau) - f(x)}{\tau - x}, \qquad f'_+(x) \geqq \frac{f(\tau) - f(x)}{\tau - x},$$

suivant que $\tau > x$, ou $\tau < x$.

L'inégalité (4) devient ainsi

$$\underset{-\infty<t<\infty}{\overline{\text{borne}}} \left\{ xt - \underset{-\infty<\tau<\infty}{\overline{\text{borne}}} [t\tau - f(\tau)] \right\} \geqq x f'_+(x) - x f'_+(x) + f(x) = f(x), \tag{5}$$

et notre théorème est complètement démontré.

Nous croyons ce résultat nouveau, mais les circonstances actuelles ne nous permettent pas de nous en assurer.