FACULTE DES SCIENCES DE MONTPELLIER SEMINAIRES DE MATHEMATIQUES.

-:-

FONCTIONS CONVEXES EN DUALITE

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

par Jean Jacques MOREAU

Professeur

I - LES FONCTIONS CONVEXES SEMI-CONTINUES INFERIEUREMENT

1 - Définitions

Soit E un espace vectoriel réel, A une partie convexe non vide de E. Soit f une fonction définie sur A, à valeur dans l'intervalle $]-\infty, +\infty]$ de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$; on sait que la notion de convexité se définit pour de telles fonctions tout comme pour les fonctions numériques finies : f est dite convexe sur A si, quels que soient a et b dans A et λ dans $]0, 1[$, on a :

$$f[\lambda a + (1-\lambda) b] \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Si, en ce cas, on prolonge f à l'espace E entier avec la valeur $+\infty$ hors de A, la fonction obtenue est convexe sur E. Grâce à cette remarque, dans la suite, on entendra toujours par fonction convexe une fonction pouvant prendre la valeur $+\infty$ et convexe sur l'espace E entier.

Exemple : Nous appelons fonction indicatrice d'une partie C de E la fonction $x \longrightarrow \psi_C(x)$ définie par

$$\psi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

On voit alors que l'ensemble C est convexe si et seulement si sa fonction indicatrice est convexe.

2 - Fonctions csi

On suppose désormais que E est un espace vectoriel topologique réel, localement convexe, séparé. Une fonction convexe, sur E entier, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, semi continue inférieurement sera qualifiée, par abréviation, fonction csi.

La somme de deux fonctions csi est une fonction csi ; de même le produit d'une fonction csi par une constante positive. L'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions csi est csi.

Pour qu'une fonction convexe soit csi, il faut et il suffit que pour tout k , l'ensemble (convexe) :

$$C_k = \{x \in E \mid f(x) \leq k\}$$

soit fermé (critère classique de semi-continuité inférieure).

Il résulte de là que la famille des fonctions csi reste la même si on remplace la topologie initiale de E par toute autre topologie localement convexe séparée donnant le même dual topologique (c'est-à-dire donnant la même famille de formes linéaires continues) : on sait en effet qu'un tel changement de topologie laisse inchangée la famille des ensembles convexes fermés. On pourrait donc dire que la notion de fonction csi ne dépend pas proprement de la topologie de E , mais seulement de sa "duologie".

Exemple 1 : Pour qu'une partie C de E soit convexe fermée, il faut et il suffit que sa fonction indicatrice ψ_C soit csi .

Exemple 2 : Une fonction affine (c'est-à-dire linéaire non nécessairement homogène) continue est csi : il en est donc de même de l'enveloppe supérieure de toute famille de fonctions affines continues. On énoncera tout-à-l'heure une réciproque.

3 - Minorantes affines continues.

Lemme 1 : Toute fonction csi possède des minorantes affines continues.

Démonstration : On va supposer que f , fonction csi, prend au moins deux valeurs finies distinctes ; en effet, si elle ne prend qu'une seule valeur finie α (et éventuellement la valeur $+\infty$) il est trivial de constater que toutes les fonctions constantes $\leq \alpha$ constituent des minorantes affines continues.

Soit donc $z_0 \in E$ et :

$$k < f(z_0) < +\infty$$

k tel que l'ensemble :

$$C = \{z \mid f(z) \leq k\}$$

ne soit pas vide. Cet ensemble est convexe fermé et $z_0 \notin C$; comme la topologie de E est localement convexe séparée, il existe un hyperplan fermé Π qui sépare z_0 et C (strictement) :

Pour simplifier les calculs, supposons faites une translation dans E telle que Π passe par l'origine (Π est alors un sous espace vectoriel fermé, de codimension 1 dans E) et une translation dans $\mathbb{R}$ telle que $k = 0$. Choisissons $e \notin \Pi$; tout $z \in E$ se décompose univoquement en :

$$z = x + \lambda e \quad \text{avec} \quad x \in \Pi \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La fonction $z \longrightarrow \lambda(z)$ est une forme linéaire continue sur E ; pour fixer les idées supposons e choisi de façon que $\lambda(z_o) > 0$, donc que $\lambda < 0$ sur C.

On va montrer qu'on peut choisir $a \in \mathbb{R}$ de manière que la forme linéaire continue :

$$z \longrightarrow l(z) = a\lambda(z)$$

minore f.

Déjà pour $z \in \Pi$ on a $l(z) = 0$ et $f(z) > 0$ (puisque Π ne rencontre pas C et que $k = 0$). Il reste donc à choisir a pour que $\lambda \neq 0$ et $x \in \Pi$ entraîne :

$$a\lambda \leqslant f(x + \lambda e)$$

c'est-à-dire encore pour que l'on ait les deux implications :

$$\lambda > 0, \quad x \in \Pi \Longrightarrow a \leqslant \frac{1}{\lambda} f(x + \lambda e)$$

$$\lambda < 0, \quad x \in \Pi \Longrightarrow a \geqslant \frac{1}{\lambda} f(x + \lambda e)$$

ce qui équivaut à :

$$(3 - 1) \quad \sup_{\substack{x \in \Pi \\ \lambda < 0}} \frac{1}{\lambda} f(x + \lambda e) \leqslant a \leqslant \inf_{\substack{x \in \Pi \\ \lambda > 0}} \frac{1}{\lambda} f(x + \lambda e)$$

La famille $\mathfrak{F}$ des nombres $\left(\frac{1}{\lambda} f(x + \lambda e)\right)_{\substack{x \in \Pi \\ \lambda > 0}}$ contient au moins un élément fini, à savoir $\frac{1}{\lambda(z_o)} f(z_o)$; donc $\inf \mathfrak{F} < +\infty$.

La famille $\mathcal{G}$ des $\left(\frac{1}{\lambda} f(x + \lambda e)\right)_{\substack{x \in \Pi \\ \lambda < 0}}$ contient aussi un élement fini puisque C n'est pas vide ; donc $\sup \mathcal{G} > -\infty$.

Pour montrer l'existence d'un $a \in \mathbb{R}$ vérifiant (3 - 1) il suffit de prouver que tout élément de $\mathcal{G}$ est inférieur ou égal à tout élément de $\mathfrak{F}$ c'est-à-dire que l'hypothèse :

(3 - 2) $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $x \in \pi$, $y \in \pi$

entraîne :

(3 - 3) $\frac{1}{\lambda} f(x+\lambda e) \leq \frac{1}{\mu} f(y+\mu e)$

Effectivement, en vertu de (3 - 2), on peut trouver α et β dans $]0, 1[$, avec $\alpha + \beta = 1$, tels que :

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0$$

En multipliant les deux membres de (3 - 3) par le nombre $\beta\mu = -\alpha\lambda > 0$ on obtient l'inégalité équivalente :

$$-\alpha f(x+\lambda e) \leq \beta f(y+\mu e)$$

Or la convexité de f donne :

$$\alpha f(x+\lambda e) + \beta f(y+\mu e) \geqslant f[\alpha x + \beta y + (\alpha\lambda + \beta\mu) e]$$

soit, au second membre, $f(\alpha x + \beta y)$ qui est > 0 puisque $\alpha x + \beta y \in \pi$ et que π ne rencontre pas C. Cela achève la démonstration.

LEMME 2. Si f est une fonction csi, quels que soient $z_0 \in E$ et $k < f(z_0)$ il existe une fonction affine continue minorant f et prenant la valeur k au point z_0.

Démonstration : L'hypothèse implique que k est fini (même si $f(z_0) = +\infty$) on peut, par translation dans $\overline{\mathbb{R}}$, se ramener à $k = 0$. On suppose que l'ensemble convexe fermé :

$$C = \{z \in E \mid f(z) \leq 0\}$$

n'est pas vide, sans quoi la propriété est triviale. Puisque $z_0 \notin C$, il existe un hyperplan fermé π séparant z_0 et C et, comme tout à l'heure, on suppose faite une translation dans E telle que π passe par l'origine. On note Δ_0 (contenant z_0) et Δ_1 (contenant C) les deux demi-espaces ouverts déterminés par π.

1er cas : Supposons qu'en un point au moins de Δ_0, f prenne une valeur finie (c'est ce qui a lieu, notamment, si $f(z_0) \neq +\infty$). On part comme tout à l'heure d'une forme linéaire continue $z \longrightarrow \lambda(z)$, nulle sur π, strictement positive sur Δ_0, strictement négative sur Δ_1 et on cherche à choisir $a \in \mathbb{R}$ pour que la forme linéaire continue :

$$l(z) = a\lambda(z)$$

minore f sur l'espace entier. Tous les éléments de la famille

$$\mathfrak{F} = \left(\frac{1}{\lambda(z)} f(z)\right)_{z \in \Delta_0}$$

sont > 0 puisque Δ_0 ne rencontre pas C, donc $\inf \mathfrak{F} \geqslant 0$. Et, comme f est finie quelque part sur Δ_0 on a $\inf \mathfrak{F} < +\infty$. Il est donc possible de satisfaire (3 - 1) par un a fini, positif ou nul. Alors

$$l(z_0) = a\,\lambda(z_0) \geqslant 0$$

par suite la fonction :

$$m(z) = l(z) - l(z_0) \leqslant l(z)$$

est une minorante affine continue de f et elle prend bien la valeur $0 = k$ au point z_0.

2ème cas : Supposons maintenant que f prenne la valeur $+\infty$ en tout point de Δ_0.
D'après le lemme 1, la fonction f possède une minorante affine continue, soit $z \longrightarrow m(z)$.

Si $m(z_0) \geqslant 0$, la fonction affine, nulle au point z_0 :

$$m(z) - m(z_0) \leqslant m(z) \leqslant f(z)$$

est aussi une minorante affine continue et la construction est terminée.

Si $m(z_0) < 0$ on procède comme suit : désignant toujours par $\lambda(z)$ une fonction linéaire continue nulle sur π, strictement positive sur Δ_0, strictement négative sur Δ_1, on peut choisir $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction affine continue :

$$n(z) = m(z) + b\,\lambda(z)$$

prenne la valeur $0 = k$ au point z_0, à savoir

$$b = -\frac{m(z_0)}{\lambda(z_0)} > 0$$

Donc sur $\Delta_1 \cup \pi$ on a :

$$n(z) \leqslant m(z) \leqslant f(z)$$

Sur Δ_0, la fonction f ayant la valeur $+\infty$ est également ~~majorée~~ minorée par n, ce qui achève la démonstration.

On peut maintenant établir le résultat fondamental:

THEOREME : Une fonction csi est égale à l'enveloppe supérieure de la famille de ses minorantes affines continues.

En effet, soit f une fonction csi ; d'après le lemme 1, la famille de ses minorantes affines continues n'est pas vide : soit $\hat{f}$ l'enveloppe supérieure de cette famille ; on a évidemment $\hat{f} \leq f$. D'autre part, pour tout $z_o \in E$, le lemme 2 fournit l'implication :

$$k < f(z_o) \Longrightarrow k \leq \hat{f}(z_o)$$

Donc :

$$f \leq \hat{f}$$

ce qui laisse $f = \hat{f}$

4 - Régularisée csi d'une fonction

Soit h une fonction quelconque, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, définie sur une partie non vide P de E . Si h possède une famille non vide, $\mathcal{M}$, de minorantes affines continues (ce n'est évidemment pas toujours le cas), l'enveloppe supérieure f de ces minorantes sera appelée régularisée csi de h . C'est la plus grande fonction csi majorée par h. En effet, si g est une fonction csi majorée par h, cette fonction est l'enveloppe supérieure de la famille $\mathcal{N}$ de ses minorantes affines continues ; or ces fonctions affines continues sont, a fortiori, des minorantes de h, c'est-à-dire que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, donc $g \leq f$.

Exemple : La fonction indicatrice ψ_Q d'une partie quelconque Q de E (voir §1) possède évidemment des minorantes affines continues (par exemple les constantes négatives) ; donc ψ_Q possède une régularisée csi : cette régularisée est la fonction indicatrice de l'enveloppe convexe fermée $\hat{Q}$ de l'ensemble Q (rappelons que $\hat{Q}$ est, par définition, l'intersection des ensembles convexes fermés contenant Q , c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe fermé contenant Q). De fait $\psi_{\hat{Q}}$ est une fonction csi et, puisque $Q \subset \hat{Q}$, on a $\psi_Q \geq \psi_{\hat{Q}}$.
Il reste à montrer que toute fonction csi, soit g , majorée par ψ_Q est majorée par $\psi_{\hat{Q}}$; on considère pour cela l'ensemble convexe fermé :

$$C = \{z \in E \mid g(z) \leq 0\}$$

On remarque que :

$$z \in Q \Longrightarrow \psi_Q(z) = 0 \Longrightarrow g(z) \leq 0$$

donc que $Q \subset C$ et que par suite, C étant convexe fermé, $\hat{Q} \subset C$.

Alors :

si $z \in \hat{Q}$ on a $\psi_{\hat{Q}}(z) = 0$ et $g(z) \leq 0$ donc $g(z) \leq \psi_{\hat{Q}}(z)$

si $z \notin \hat{Q}$ on a $\psi_{\hat{Q}}(z) = +\infty$ donc toujours $g(z) \leq \psi_{\hat{Q}}(z)$.

Notons encore ceci :

<u>Si une fonction quelconque</u> h , <u>définie sur une partie</u> P <u>de</u> E , <u>possède une régularisée</u> csi, <u>soit</u> f , <u>cette régularisée prend la valeur</u> $+\infty$ <u>hors de l'enveloppe convexe fermée</u> $\hat{P}$ <u>de</u> P .

En effet $\varphi_{\hat{P}} \geq 0$ donc :

$$f + \varphi_{\hat{P}} \geq f$$

Mais d'autre part $\varphi_{\hat{P}}$ est nul sur P , de sorte que

$$f + \varphi_{\hat{P}} \leq h$$

Ainsi la somme $f + \varphi_{\hat{P}}$ est une fonction csi majorée par h ; il en résulte :

$$f + \varphi_{\hat{P}} \leq f$$

En définitive :

$$f + \varphi_{\hat{P}} = f$$

Comme $\varphi_{\hat{P}}$ est égal à $+\infty$ sur le complémentaire de $\hat{P}$, il en est de même du second membre f .

II - DUALITE

5 - Définitions

Dans toute la suite, on va considérer deux espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{R}$, localement convexes séparés, soient F et G. Ces deux espaces sont mis en dualité topologique par une forme bilinéaire $(x, y) \in F \times G \longrightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ nous voulons dire par là que :

- les applications $x \longrightarrow \langle x, y\rangle$ de F dans $\mathbb{R}$ constituent, y parcourant G, toutes les formes linéaires continues sur F,
- les applications $y \longrightarrow \langle x,y\rangle$ de G dans $\mathbb{R}$ constituent, x parcourant F, toutes les formes linéaires continues sur G.

Ces hypothèses impliquent que si deux formes linéaires $x \longrightarrow \langle x, y_1\rangle$ et $x \longrightarrow \langle x, y_2\rangle$ sont identiques, on a $y_1 = y_2$ (et remarque analogue en échangeant F et G). Alors, en effet, un demi-espace fermé de G, soit

$$\{y \in G \mid \langle x, y\rangle \leq \alpha\} \quad (\text{où } x \in F \text{ et } \alpha \in \mathbb{R})$$

contient y_1 si et seulement si il contient y_2. Donc y_1 est contenu dans l'intersection des demi-espaces fermés contenant y_2 ; comme G est localement convexe séparé, cette intersection se réduit à $\{y_2\}$ d'où $y_1 = y_2$.

Il serait revenu au même de poser que la forme bilinéaire $(x, y) \longrightarrow \langle x, y\rangle$ satisfait aux axiomes D_I et D_{II} de Bourbaki et que les topologies (localement convexes séparées) de F et G sont <u>compatibles avec la dualité</u> que définit cette forme bilinéaire (BOURBAKI, <u>Espaces vectoriels topologiques</u>, chap. IV, § 2, n°3)

D'ailleurs quand on considérera, sur F ou sur G, des fonctions csi, il sera indifférent de remplacer ces topologies par toutes autres topologies (localement convexes séparées) compatibles avec ladite dualité (cf. : § 2). F et G joueront des rôles entièrement symétriques.

6 - Fonction polaire d'une fonction quelconque

Soit définie, sur une partie P de F (pour fixer les idées), une fonction h, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. <u>On suppose que</u> h <u>n'a pas partout la valeur</u> $+\infty$; soit donc P_o la partie (non vide) de P sur laquelle $g \neq +\infty$.

On appellera <u>fonction polaire</u> de h, la fonction $y \longrightarrow g(y)$ définie sur G par :

$$g(y) = \sup_{x \in P} [\langle x, y\rangle - h(x)]$$

$$= \sup_{x \in P_o} [\langle x, y\rangle - h(x)]$$

g est l'enveloppe supérieure de la famille des fonctions affines continues $y \longrightarrow \langle x, y\rangle - h(x)$, l'indice x décrivant P_o : c'est donc une fonction csi sur G.

La connaissance de g permet de construire explicitement la famille des minorantes affines continues de h. En effet, toute fonction affine continue sur F est de la forme :

$$x \longrightarrow \langle x, y\rangle - \alpha \quad \text{avec} \quad y \in G \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dire que cette fonction affine est une minorante de h signifie que ;

$$h(x) - \langle x, y\rangle + \alpha \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in P$$

c'est-à-dire :

$$\alpha \geqslant \sup_{x \in P} [\langle x, y\rangle - h(x)] \text{ à savoir } g(y)$$

Il résulte de là qu'une fonction, définie sur tout ou partie de F, ayant la même famille de minorantes affines continues que h donne la même fonction polaire g. En particulier la régularisée csi de h, si elle existe, a même fonction polaire que h. Si h n'a pas de régularisée csi, c'est que g prend la valeur $+\infty$ en tout point de G.

Ces remarques faites, nous nous bornerons dans la suite à considérer les fonctions polaires de fonctions csi.

7 - Duale d'une fonction csi. Réciprocité

Soit f une fonction csi, non partout infinie sur F, et sa fonction polaire ;

$$g(y) = \sup_{x \in F} [\langle x, y\rangle - f(x)]$$

Comme on vient de le voir, une fonction affine continue sur F :

$$x \longrightarrow \langle x, y\rangle - \alpha \quad (\text{où } y \in G \text{ et } \alpha \in \mathbb{R})$$

minore f si et seulement si :

$$\alpha \geqslant g(y)$$

Cela exige $g(y) \neq +\infty$; comme f possède certainement des minorantes affines continues, on voit que g n'a pas partout sur G la valeur $+\infty$.

D'autre part f est l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues, donc :

$$f(x) = \sup_{\substack{g(y) \neq +\infty \\ \alpha \geqslant g(y)}} [\langle x, y\rangle - \alpha]$$

$$= \sup_{g(y) \neq +\infty} [\langle x, y\rangle - g(y)]$$

ou, puisque le crochet vaut $-\infty$ si $g(y) = +\infty$:

$$f(x) = \sup_{y \in G} [\langle x, y\rangle - g(y)]$$

c'est-à-dire que f est la fonction polaire de g. Nous exprimons cette réciprocité en disant que les deux fonctions csi f et g sont duales l'une de l'autre.

3 - Dictionnaire de la dualité

On va passer en revue un certain nombre de propriétés usuelles.

Dans tout ce paragraphe, f, f_1, ... désigneront des fonctions csi non partout infinies sur F ; g, g_1,... désigneront leurs duales respectives, qui sont des fonctions csi, non partout infinies sur G.

a) Ordre

Si $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ pour tout $x \in F$ il résulte immédiatement de la définition des fonctions duales que :

$$g_1(y) \geqslant g_2(y) \quad \text{pour tout } y \in G$$

b) Borne inférieure et valeur à l'origine

$$g(0) = \sup_{x \in F} [-h(x)] = -\inf_{x \in F} h(x)$$

Ainsi, pour qu'une fonction csi soit bornée inférieurement ; il faut et suffit que sa duale prenne à l'origine une valeur finie.

c) Forme linéaire continue et indicatrice d'un point.

Si $f : x \longrightarrow \langle x, b\rangle$

est une forme linéaire continue sur F on a :

$$g(y) = \sup_{x \in F} \langle x, y - b\rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y = b \\ +\infty & \text{si } y \neq b \end{cases}$$

c'est-à-dire que g est la fonction indicatrice de l'ensemble $\{b\}$.

) Addition d'une fonction affine et translation

Soit

$$f_2(x) = f_1(x) + \langle x, b \rangle - \beta$$

vec $b \in G$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$g_2(y) = \sup_{x \in F} [\langle x, y \rangle - f_1(x) - \langle x, b \rangle + \beta]$$

$$= \beta + \sup_{x \in F} [\langle x, y - b \rangle - f_1(x)]$$

$$= \beta + g_1(y - b)$$

'est-à-dire que le graphe de g_2 dans $G \times \overline{\mathbb{R}}$ s'obtient en faisant subir au raphe de g_1 la translation b selon G et la translation β selon $\overline{\mathbb{R}}$

) Multiplication par une constante positive.

Soit

$$f_2(x) = \lambda f_1(x)$$

λ est une constante > 0 . Alors :

$$g_2(y) = \sup_{x \in F} [\langle x, y \rangle - \lambda f_1(x)]$$

$$= \lambda \sup_{x \in F} [\langle x, \frac{1}{\lambda} y \rangle - f_1(x)]$$

$$= \lambda \, g_1 \left(\frac{1}{\lambda} y\right)$$

Homothétie

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, non nul (mais de signe quelconque), et :

$$f_2(x) = f_1(\alpha x)$$

ors :

$$g_2(y) = \sup_{x \in F} [\langle x, y \rangle - f_1(\alpha x)]$$

, en substituant à l'indice x l'indice $x' = \alpha x$ qui parcourt F lorsque x rcourt F :

$$g_2(y) = \sup_{x' \in F} [\langle \frac{1}{\alpha} x', y \rangle - f_1(x')]$$

$$= g_1\left(\frac{1}{\alpha} y\right)$$

g) Duale d'une enveloppe supérieure.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fonctions csi. On note $\mathcal{M}_i$ l'ensemble des minorantes affines continues de la fonction f_i. Si l'intersection $\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$ n'est pas vide l'enveloppe supérieure de cet ensemble de fonctions affines continues est une fonction csi, soit f. C'est la plus grande fonction csi minorant toutes les f_i ; c'est donc aussi la régulariésée csi de l'enveloppe inférieure $\inf_{i \in I} f_i$ (cf. § 4). Pour trouver la duale de f il suffit de remarquer qu'une fonction affine continue sur F :

$$x \longrightarrow \langle x, y \rangle - \alpha$$

minore f si et seulement si elle minore chacune des f_i. Donc (Cf. § 7) la condition :

$$\alpha \geqslant g(y)$$

équivaut à

$$\forall\, i \in I \;:\; \alpha \geqslant g_i(y)$$

Par conséquent :

$$g(y) = \sup_{i \in I} g_i(y)$$

g est l'enveloppe supérieure des g_i. Si cette enveloppe supérieure est égale à $+\infty$ partout sur G, c'est qu'il n'existe pas de fonction affine continue minorant toutes les f_i, autrement dit, que $\inf_{i \in I} f_i$ ne possède pas de régularisée csi.

h) Transmuée de l'addition

La somme $f = f_1 + f_2$ de deux fonctions csi est une fonction csi. La duale g (si f n'est pas partout infinie) est une fonction csi sur G qui résulte des duales g_1 et g_2 par une loi de composition non classique.
Cette loi de composition, évidemment commutative et associative, sera étudiée dans un autre exposé.

§ 9 - Fonctions positivement homogènes et fonctions indicatrices

On dit usuellement que f est positivement homogène (sous entendu : de ~~degré~~ 1) si, pour tout $\mu > 0$ et tout $x \in F$ on a :

$$\mu f\left(\frac{1}{\mu} x\right) = f(x)$$

On suppose que f est une fonction csi ; pour qu'elle soit positivement homogène, il faut et il suffit, d'après le §8 e, que la fonction duale g possède la propriété :

$$\mu g(y) = g(y)$$

C'est-à-dire que g ne peut prendre que les valeurs 0 ou + oo : c'est la fonction indicatrice d'un ensemble D, convexe fermé (puisque g est csi).

Le §8 b montre alors :

- que :

$$f(0) = - \inf g = 0$$

- que la fonction csi positivement homogène f est bornée inférieurement si et seulement si D contient l'origine ; alors inf f = 0 .

On dispose ainsi de deux techniques pour décrire l'ensemble D , convexe fermé quelconque de G : soit par la fonction indicatrice $\psi_D = g$ (description "ponctuelle"), soit par la fonction duale :

$$(9 - 1) \quad f(x) = \sup_{y \in G} [\langle x, y\rangle - g(y)] = \sup_{y \in D} \langle x, y\rangle$$

Cette dernière permet, comme on sait, la construction explicite de la famille des minorantes affines continues de $\psi_D = g$, c'est-à-dire des fonctions affines continues qui sont ≤ 0 sur D : cela revient donc à donner la famille des demi-espaces fermés contenant D (description "tangentielle").

Soit, dans F :

$$C = \{x \in F \mid f(x) \leq 1\}$$

ensemble fermé convexe (puisque f est csi) et contenant l'origine (puisque f(0) = 0). D'après (9 - 1) on a :

$$C = \{x \in F \mid \sup_{y \in D} \langle x, y\rangle \leq 1\}$$

$$= \{x \mid \langle x, y\rangle \leq 1 \text{ pour tout } y \in D\}$$

ce qui s'énonce classiquement en disant que C est l'ensemble polaire de D. Il est classique alors que l'ensemble polaire D' de C est l'enveloppe convexe fermée de $D \cup \{0\}$, c'est-à-dire D lui-même si $0_G \subset D$.

Jauge

Si Γ est, dans F, un ensemble convexe fermé non vide contenant l'origine, il existe une fonction φ et une seule possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \{x \in F \mid \varphi(x) \leq 1\} = \Gamma \\ \varphi \text{ est csi, positivement homogène et bornée inférieurement.} \end{cases}$$

En effet pour que φ possède ces propriétés, il faut et suffit, d'après ce qu'on a vu, que sa duale γ soit la fonction indicatrice d'un ensemble Δ de G, convexe fermé, contenant l'origine et admettant Γ comme ensemble polaire ; Δ est bien défini par là : c'est l'ensemble polaire de Γ. Il est facile de construire directement cette fonction φ : pour tout $k \in [\,0\,, +\infty\,[$, notons $k\Gamma$ l'image de Γ par l'homothétie de centre O_F, de rapport k, et, conventionnellement, notons $(+\infty)\Gamma = F$.

Alors, pour tout $x \in F$:

$$\varphi(x) = \inf \{k \in [\,0\,, +\infty\,] \mid k\Gamma \ni x\}.$$

La fonction φ est usuellement appelée <u>Jauge</u> de l'ensemble Γ (convexe contenant l'origine).

<u>Cônes mutuellement polaires</u>

Notons en fin qu'une fonction indicatrice sur F peut être positivement homogène : c'est alors la fonction indicatrice d'un cône de sommet O_F ; si la fonction est csi, ce cône C est convexe fermé. D'après ce qui précède, la fonction duale possède exactement, les mêmes propriétés : c'est la fonction indicatrice d'un cône convexe fermé D, de sommet O_G.

Chacun des deux cônes est l'ensemble polaire de l'autre :

$$C = \{x \in F \mid \sup_{y \in D} \langle x, y \rangle \leq 1\} \quad \text{(et vice versa)}$$

mais cela équivaut aussi bien à :

$$C = \{x \in F \mid \sup_{y \in D} \langle x, y \rangle \leq 0\} \quad \text{(et vice versa)}$$

10 - <u>Points conjugués</u>

Deux fonctions affines continues sur F, soient :

$$x \longrightarrow \langle x, y_1 \rangle - \alpha_1 \quad \text{et} \quad x \longrightarrow \langle x, y_2 \rangle - \alpha_2 ,$$

sont comparables, au sens de la relation d'ordre pour les fonctions numériques définies sur F, si et seulement si $y_1 = y_2$: on dira en ce cas qu'elles sont de <u>même pente</u>.

Soit f une fonction csi, non partout infinie sur F, et g sa duale. Il résulte du §7 que f possède des minorantes affines continues de pente donnée y si et seulement si $g(y) < +\infty$: alors l'ensemble ordonné de ces minorantes admet pour élément maximal la fonction $x \longrightarrow \langle x, y\rangle - g(y)$. Les fonctions de cette forme, y parcourant l'ensemble $\{y \in G \mid g(y) < +\infty\}$, sont naturellement appelées les minorantes maximales de f et f est visiblement égale à l'enveloppe supérieure de cette famille de minorantes particulières.

Nous disons d'autre part qu'une fonction affine continue l, minorante de f, est exacte au point $x_0 \in F$ si $l(x_0) = f(x_0)$. Toute minorante qui est exacte pour un point est une minorante maximale ; par contre une minorante maximale n'est pas nécessairement exacte quelque part. En outre $f(x_0) < +\infty$ n'implique pas nécessairement l'existence d'une minorante exacte au point x_0.

Pour que f possède, au point $x_0 \in F$, une minorante affine continue exacte, il faut et suffit qu'il existe $y_0 \in G$ tel que :

$$(10-1) \quad f(x_0) + g(y_0) = \langle x_0, y_0\rangle$$

Nous dirons en ce cas que les deux points $x_0 \in F$ et $y_0 \in G$ sont conjugués par rapport au couple de fonctions duales (f, g). Cela implique évidemment que $f(x_0)$ et $g(y_0)$ sont l'un et l'autre finis. D'après la définition des fonctions duales, pour tout x dans F et tout y dans G, on a $f(x) + g(y) \geqslant \langle x, y\rangle$; il en résulte que (10 - 1) équivaut à :

$$(10-2) \quad f(x_0) + g(y_0) \leqslant \langle x_0, y_0\rangle$$

L'ensemble des conjugués de x_0 s'écrit donc :

$$\{y \in G \mid g(y) - \langle x_0, y\rangle \leqslant - f(x_0)\}$$

Comme $y \longrightarrow g(y) - \langle x_0, y\rangle$ est une fonction csi, cet ensemble est convexe fermé, éventuellement vide (il est vide, en particulier, si $f(x_0) = +\infty$).

11 - Etude locale de la dualité

Supposant alors qu'il existe une minorante de f exacte au point x_0, à savoir :

$$l(x) = \langle x, y_0\rangle - g(y_0) = \langle x - x_0, y_0\rangle + f(x_0)$$

on est amené à s'intéresser aux éventualités particulières suivantes :

1°) Si x_0 ne possède pas d'autre point conjugué que y_0, il n'existe pas d'autre minorante affine continue de f qui soit exacte en x_0.

2°) Si y_0 ne possède pas d'autre point conjugué que x_0, la minorante l n'est exacte en aucun autre point que x_0, c'est-à-dire que la différence $f(x) - l(x)$ est strictement minimum en ce point.

On voit que ces deux éventualités sont duales : pour que f possède, au point x_0, une minorante unique exacte - soit y_0 sa pente - il faut et suffit que g possède, au point y_0, une minorante isolément exacte (dont la pente est x_0)

Plus généralement, supposons maintenant que f possède au point x_0 une famille de minorantes exactes : ce sont les fonctions de la forme

$$x \longrightarrow \langle x, y\rangle - g(y)$$

ou y parcourt l'ensemble Γ des conjugués de x_0 : Γ est alors dans G un convexe fermé non vide et d'après (10 - 1) :

$$y \in \Gamma \Longrightarrow g(y) = \langle x_0, y\rangle - f(x_0)$$

c'est-à-dire que g est égale sur l'étendue de Γ à la fonction affine continue $y \longrightarrow \langle x_0, y\rangle - f(x_0)$. On peut dire que Γ est une "facette" ou "plage de linéarité" de la fonction g. Hors de Γ, g est strictement supérieure à cette fonction.

Réciproquement, si g possède une minorante (maximale) :

$$y \longrightarrow \langle x_0, y\rangle - f(x_0)$$

qui se trouve être exacte en certains points de G, l'ensemble Γ de ces points est convexe fermé et toutes les fonctions de la forme

$$x \longrightarrow \langle x, y\rangle - g(y)$$

y parcourant Γ, sont, sur F, des minorantes de f exactes au point x_0

L'ensemble Γ peut également être atteint de la manière suivante : Ramenons-nous par translation au cas où x_0 est l'origine, c'est-à-dire que nous posons (en supposant $f(x_0) < +\infty$) :

$$f_1(x) = f(x + x_0) - f(x_0) \quad (\text{donc } f_1(0) = 0)$$

Les minorantes affines continues de f exactes au point x_0, correspondent, par cette même translation, à des formes linéaires continues qui minorent f_1. Cette famille de formes linéaires, si elle n'est pas vide, a pour enveloppe supérieure une fonction φ_1 qui est la plus grande fonction csi positivement homogène minorant f_1. La duale γ_1 de φ_1

st la fonction indicatrice d'un convexe fermé Γ_1 : parmi toutes les fonctions ndicatrices d'ensemble convexe fermé qui majorent g_1 (duale de f_1), γ_1 st la plus petite. Comme, d'après le § 8 b, $\inf g_1 = - f_1(0) = 0$, Γ_1 est l'ensemble des points où g_1 atteint sa borne inférieure 0.

omme :

$$f(x) = f(x_o) + f_1(x - x_o)$$

le § 8 d nous donne :

$$g(y) = g_1(y) + \langle x_o, y \rangle - f(x_o)$$

Ainsi Γ_1 n'est autre que Γ, dont nous retrouvons toutes les propriétés.

Note bibliographique

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

L'idée des fonctions convexes duales se trouve déjà, pour $F = G = \mathbb{R}$, dans S. MANDELBROJT, Sur les fonctions convexes, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, 209 (1939), p. 977 - 978 et, pour $F = G = \mathbb{R}^n$ dans W. FENCHEL, On conjugate convex functions, Canadian Journal of Math., 1 (1949) p. 73 - 77.

Noter que ces auteurs, considérant seulement des fonctions à valeurs finies, ne peuvent en général les définir sur l'espace entier. Le cas $F = G = \mathbb{R}$ est d'ailleurs en relation étroite avec l'inégalité de Young ; voir sur ce point E.F. BECKENBACH, R. BELLMAN, Inequalities, Springer 1961, p. 15 et M. A KRASNOSEL'SKII, Ya. B. RUTICKII, Convex functions and Orliczspaces (traduit de la 1ère ed. russe par L.F. Boron), Noordhoff, 1961, Chap. 1.

Dans la théorie de la programmation non linéaire on considère, sur $\mathbb{R}^n$, des fonctions concaves conjuguées, de définition analogue ; voir : C. BERGE, A. GHOUILA-HOURI, Programmes, jeux et réseaux de transport, Dunod, 1962, Chap. 5.

On notera d'ailleurs que, tant qu'il s'agit, sur $F = G = \mathbb{R}^n$, de fonctions strictement convexes (resp. concaves) différentiables, la dualité n'est pas autre chose que la transformation de Legendre, usuelle en théorie des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire encore, en considérant les graphes des fonctions dans $\mathbb{R}^{n+1}$, la transformation par polaires réciproques relativement à un hyperparaboloïde de révolution.